Essai de modélisation endogène du progrès technique

Georges Daw

Essai de modélisation endogène du progrès technique

Les implications de la diffusion des produits tic sur les parts factorielles

Introduction

Quelles sont les forces qui orientent le progrès technique d'une économie en direction d'un type de bien ou service ou d'un autre ?
Pourquoi durant la décennie 90, le progrès technique fut-il relativement plus vigoureux dans l'industrie des produits TIC,des semi-conducteurs en particulier ?
Il est tentant de retrouver les faits largement admis et confirmés par l'exercice de la comptabilité de la croissance c'est-à-dire le rôle de plus en plus prépondérant du secteur des nouvelles technologies dans la croissance économique lors de cette période.
Comment donc donner un fondement microéconomique aux résultats constatés ?
Il est tentant de travailler avec une fonction Cobb-Douglas,comme cela est le cas dans l'exercice de comptabilité de la croissance mais avec une élasticité de substitution unitaire,on peut être très sceptique quant à son pouvoir d'expliquer les changements à court terme dans les parts factorielles[1]
De même supposer comme le fait la littérature[2] que le progrès technique est d'emblée harrodien est une perspective compatible avec le fait stylisé sur la stabilité des parts factorielles mais élimine l'occurrence d'un progrès technique sur le capital.
C'est ce que font pourtant les démonstrations théoriques des modèles cherchant à prouver que le progrès technique de long terme serait exclusivement harrodien.
S'il est admis que le progrès technique est effectivement harrodien, pourquoi tout le progrès technique serait-il harrodien ? Dit autrement pourquoi le progrès technique net,entendu comme l'effet net du progrès sur l'un des facteurs capital ou travail,serait de nature à améliorer le facteur travail.
C'est du même ordre d'idée que de se demander pourquoi la maximisation du profit des firmes impliquerait d'orienter le changement technique vers le facteur travail[3].
Une Cobb-Douglas ne permettrait donc pas l'analyse des fluctuations de court-terme qui sont réelles aussi bien historiquement comme l'illustre la hausse relative de la part du capital dans plusieurs pays au lendemain de la seconde guerre mondiale qu'expérimentalement c'est-à-dire malgré les modifications de politique économique (taxation du capital,imposition du travail…)
Mais et cela n'est pas souvent souligné: elle ne met en évidence la stabilité des parts factorielles que dans le cadre bien précis de l'exercice de comptabilité de la croissance dont il s'agit d'un des outils de base.

---

[1] Remarquons que la méthode de la comptabilité de la croissance utilise des Cobb-Douglas mais les élasticités de la production par rapport aux facteurs sont calculées comme des parts *a posteriori* de ces facteurs dans l'output. La démarche est ici inversée.
[2] Cf pour une démonstration des effets de la neutralité harrodienne sur la répartition des facteurs Schubert.K [1996] ,Macroéconomie Comportements et Croissance,Paris Vuibert,Encadré 11 p 107.
En outre,le lecteur pourra consulter Barro.R.J et Sala.i .Martin [1996],Economic Growth Mc Graw-Hill,New York pp 61-62 qui démontre que l'obtention d'une croissance d'état régulier nécessite soit l'utilisation d'une fonction de forme Cobb-Douglas,soit l'hypothèse *a "priori (ste)"* de neutralité harrodienne.
[3]Noter que dans une logique de substitutions factorielles,un biais de progrès technique vers le travail améliore la productivité du capital alors qu'un biais de progrès technique vers le capital améliore la productivité du travail.

L'exercice de comptabilité de la croissance s'intéresse à l'apport de chaque facteur pris isolément.
L'agrégation des différents apports aboutit au chiffre de croissance totale.
Or la contribution de chaque facteur est d'abord fondamentalement reliée aux interactions avec les autres facteurs mais elle est également la résultante des actions individuelles des différents agents (consommateurs,producteurs de biens finals,producteurs de biens intermédiaires,chercheurs,Etat…).
Ces deux interactions n'apparaissent qu'en bout de chaîne au niveau de l'exercice de la comptabilité de la croissance,ce qui –mais ce n'est pas sont but ultime – lui ôte la prétention de se prêter à elle seule à l'établissement de prévisions de croissance ou d'impact de politiques économiques sur la croissance.
Le modèle que nous proposons d'adapter aux produits TIC répond au souci d'esquisser ces deux questions et lève dans le même temps les deux *a priori* théoriques (utilisation d'une Cobb-Douglas et hypothèse de progrès technique ad hoc) dans un cadre où les nouveaux produits TIC consistent en des biens intermédiaires introduits dans l'économie par un secteur dédié à la recherche dans ce domaine.
Une fois inventés,ces biens intermédiaires sont produits par le secteur des biens intermédiaires correspondant qui aura auparavant acheté une licence au secteur de la recherche.
Les biens intermédiaires ainsi produits sont utilisés dans des secteurs de biens finals qui fourniront subséquemment des biens finals correspondants.
Dans cette perspective,il est nécessaire d'abandonner les hypothèses "*a prioristes"* c'est-à-dire l'utilisation d'une fonction comme la Cobb-Douglas mais également le fait que le progrès technique est harrodien dès le départ.

Nous rappelons dans l'encadré ci-dessous,les implications de l'hypothèse de progrès technique harrodien sur la répartition du revenu entre les facteurs de production.

Encadré 2.1: Neutralité *a priori* du progrès technique au sens de Harrod et répartition factorielle

Nous rappelons les effets du progrès technique neutre au sens de Harrod sur la répartition factorielle c'est-à-dire les poids du facteur travail et du facteur capital dans le produit ou ce qui revient au même,le poids relatif de l'un des facteurs en termes de l'autre.
Soit une fonction de production,à rendements constants (homogène de degré 1 précisément) avec progrès technique neutre au sens de Harrod :

$$Y_t = F\left(K_t, A_t L_t\right)$$

Puisque cette fonction est homogène de degré 1,on peut aussi l'écrire comme :

$\dfrac{Y_t}{K_t} = F\left(1, \dfrac{A_t L_t}{K_t}\right)$ et en notant $\mu = \dfrac{A_t L_t}{K_t}$ $et\ F(1,\mu) = f(\mu)$ on a alors :

$$\frac{Y_t}{K_t} = f(\mu)$$

Par définition,la neutralité au sens de Harrod signifie que toutes choses étant égales par ailleurs (que le coût réel du capital $\left(\frac{r}{p}\right)$ soit constant) seule la productivité du facteur travail est modifiée,ce qui veut dire que la productivité du facteur capital reste alors inchangée.

Cela exige alors que $\frac{1}{f(\mu)}$ et par conséquent $\mu = \frac{A_t L_t}{K_t}$ restent inchangés.

Comme déjà définie,la répartition factorielle s'écrit:

$$\sigma_K = \frac{\frac{r_t K_t}{p_t Y_t}}{\frac{w_t L_t}{p_t Y_t}} = \frac{r_t K_t}{w_t L_t}$$ Ce ratio est simplement la part relative du capital.

(on retrouvera cette part relative du capital dans les développements ultérieurs: cf équation (26)

Avec l'hypothèse de rémunération des facteurs à leur productivité marginale[4],la part relative du capital devient:

$$\sigma_K = \frac{\frac{\partial F}{\partial K_t} K_t}{\frac{\partial F}{\partial L_t} L_t}$$

Ecrivons comme usuellement les productivités marginales en fonction de $f(\mu)$:

$$\frac{\partial F}{\partial K_t} = \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = \frac{\partial}{\partial K_t}\left(K_t F(1,\mu)\right) = \frac{\partial}{\partial K_t} K_t f(\mu) = f(\mu) + K_t \frac{\partial}{\partial K_t} f(\mu) = f(\mu) + K_t f'(\mu)\mu'$$

$$\frac{\partial F}{\partial K_t} = f(\mu) + K_t f'(\mu)\left(-\frac{A_t L_t}{K_t^2}\right) = f(\mu) - \mu f'(\mu)$$

$$\frac{\partial F}{\partial N_t} = \frac{\partial}{\partial N_t}\left(K_t f(\mu)\right) = K_t \frac{\partial}{\partial N_t} f(\mu) = A_t f'(\mu)$$

C'est à ce stade qu'il est important de préciser qu'à la différence du facteur travail,le facteur capital peut s'accumuler.C'est d'ailleurs pourquoi les modèles de croissance exogène supposent d'emblée l'existence de progrès technique harrodien qui est

[4] Les hypothèses de rendements d'échelle constants ou de concurrence pure et parfaite de long terme permettent de justifier théoriquement cette rémunération des facteurs à leurs productivités marginales.
Empiriquement et à un niveau agrégé des variables,il est généralement admis une élasticité relative du capital au travail d'1/2.L'hypothèse de rendements d'échelle constant a l'avantage de permettre notamment d'estimer la part de rémunération du facteur capital (plus difficile à obtenir que la part du facteur travail),en calculant d'abord la part de la masse salariale dans le revenu,et en prenant ensuite son complément à l'unité pour évaluer la part de rémunération du facteur capital.
Pour de plus amples détails notamment à un niveau désagrégé des facteurs se reporter au chapitre 1.

compatible avec le fait stylisé sur la répartition stable de la rémunération relative du facteur capital.

Pour le voir clairement,observons la formule $\mu = \frac{A_t L_t}{K_t}$:

μ ,peut demeurer constante même en présence de progrès technique sur le facteur travail (harrodien).En effet cela implique seulement que le taux de progrès harrodien se réalise aux même taux que l'accumulation du capital.
En ce cas,en supposant la population active inchangée,le numérateur évolue au même rythme que le dénominateur.En revanche,à supposer que nous fûmes partis de l'hypothèse de progrès technique solowien, $\mu' = \frac{A_t K_t}{N_t}$ ne saurait être constante sauf à considérer ce qui est invraisemblable,que la population active croisse plus rapidement que le taux de croissance et de l'accumulation et du progrès technique sur le facteur capital.

En comparant les deux productivités marginales,et donc sous l'hypothèse que μ constante,on en déduit que la productivité marginale du capital reste bien constante.
Par contre la productivité marginale du facteur travail évolue au même rythme que le progrès technique.Cette amélioration de la productivité du travail autorise,pour un même niveau de production (sur une même isoquante) d'utiliser moins de facteur travail mais mieux rémunéré,ce qui est de nature à laisser inchangé le dénominateur de la part relative du capital.
Exprimons la part relative du facteur capital en fonction de $f(\mu)$:

$$\sigma_K = \frac{A_t f'(\mu) L_t}{\left(f(\mu) - \mu f'(\mu)\right) K_t} = \frac{\mu f'(\mu)}{f(\mu) - \mu f'(\mu)}$$

Etant donné la constance supposée et possible (par rapport à du progrès solowien ou hicksien) de μ ,la part relative du capital reste inchangée et donc la part de rémunération de chaque facteur dans le produit aussi.
On voit que la neutralité au sens de Harrod,lorsque la fonction de production est homogène de degré 1 et que le coût réel du capital est donné maintient la répartition factorielle stable et améliore le salaire réel.
Mais elle ne maintient pas fixe le rapport capital/travail utilisé dans la production.
Ce type d'évolution concorde avec le consensus théorique et empirique de la croissance économique de long terme tels que les décrivent respectivement le modèle de Solow et les faits stylisés de Kaldor en 1961.
Pour clore,ce développement,faisons la remarque suivante qui concerne letaux de l'augmentation de la productivité que la démonstration et les propos ci-dessus figent aux taux A_t .
Elles ne prennent en effet pas en compte le phénomène de *"capital deepening"*
Même s'il s'est accentué dans la deuxième moitié des années 1990,le rapport capital équipement des entreprises à leur valeur ajoutée est sur une tendance haussière depuis le milieu des années 1960.Cet enrichissement de la croissance économique en capital s'explique par la baisse du prix relatif des ces biens et notamment les TIC.

Mais la perception de ce phénomène n'est pas possible à partir des calculs du ratio capital/valeur ajoutée en valeur.
Par ailleurs,la majorité des modèles de croissance théoriques usuels considèrent un seul secteur de production alors qu'en raison des rythmes différenciés de progrès technique selon les secteurs,il serait pertinent d'en considérer deux: l'un producteur de capital traditionnel,l'autre producteur de produits TIC,ce dernier expérimentant une baisse tendancielle de son prix relativement au premier secteur.
Cette remarque permettrait d'envisager alors la substitution capital TIC-travail.
En réalité donc,si l'on envisage le phénomène de substitution factorielle,non pris en compte dans ce développement,on peut observer un phénomène de *"capital deepening"*en présence de progrès technique harrodien.En effet,comme le facteur capital TIC est devenu relativement moins cher que le facteur travail,on peut substituer du capital TIC au travail.
La question est de savoir l'impact de cette substitution sur la part relative du capital.En partant de la formule de la part relative du capital,on peut dire que le numérateur augmente (plus de capital est utilisé pour produire) et donc le dénominateur diminue,ce qui fait augmenter la part relative du capital mais pas seulement.La question subsidiaire porte sur l'effet du *"capital deepening"* sur les salaires.
La substitution du capital TIC au travail a pour effet d'améliorer la productivité du facteur travail en sus de l'effet du progrès technique harrodien.
Dans le cas où les biens sont complémentaires,il n'y a pas de *"capital deepening"*.
Mais ce dernier cas reste théorique.
En effet,empiriquement,si le ratio capital total/PIB reste plutôt constant en valeur,il n'en n'est pas de même du ration en volume.
Cela s'explique non seulement par une part de plus en plus élevée du capital TIC dans le capital total,ce qui provient d'une substitution du capital TIC à la fois au capital traditionnel mais aussi au facteur travail.

Il nous faut par conséquent une fonction de production plus flexible afin de ne pas contraindre le comportement des agents de notre modèle.
Acemoglu [2001][5] utilise une fonction plus générale permettant l'existence de biais de progrès technique.

Remarque sur la modélisation adoptée pour le progrès technique

Il est utile de faire une remarque sur l'aspect de la modélisation avant de commencer la présentation.
Tel que déjà dit,le but est trouver une modélisation plus riche dans le sens où elle s'affranchirait de toute hypothèse "*a prioriste"* sur la direction du progrès technique et bien entendu et où elle utiliserait une autre fonction de production qu'une Cobb-Douglas pour permettre d'étudier des changement des parts factorielles notamment à court terme comme le montrent les figures a et b un peu plus en avant sans pour autant sacrifier la stabilité sur long terme des parts factorielles dans le revenu.
La hausse régulière des niveaux de salaires confirmée par les travaux de comptabilité de la croissance et notamment sur la fin des années 90 est un fait.
L'amélioration de la productivité du travail ou de la même façon,le progrès technique portant sur le facteur travail peut se modéliser de deux manières:

[5] *« Labor and Capital Augmenting Technical Change » Journal of European Economic Association Volume 1*

- soit comme il est le plus largement fait,en l'introduction de techniques améliorant directement la productivité du travail.

C'est ce qu'on voit dans la plupart des modèles de croissance avec progrès technique,où il suffit d'affecter au facteur travail un nombre positif comme dans l'expression suivante où le progrès serait harrodien: $Y = F(K, aL)$

- soit en l'introduction de nouveaux biens ou services utilisateurs du facteur travail ou intensifs en facteur travail,ce qui renvoie à une même réalité c'est-à-dire à l'introduction de biens et services dont l'utilisation sollicite le facteur travail et qui permettent en retour d'en améliorer la productivité du travail.

Cet impact sur la productivité du travail est le propre des biens et services rentrant dans ce qu'il est convenu d'appeler "biens intensifs en travail"

Les biens et services TIC rentrent dans cette deuxième configuration de la modélisation et nous l'adoptons pour étudier les propriétés du comportement de court et de long terme d'une économie qui comprend un secteur générique produisant des biens et services TIC et de façon plus englobante tous les biens et services qui réduisent le coût du travail et un secteur Hors-TIC produisant des biens et services intensifs en capital et de façon plus englobante,tous les biens et services qui réduisent le coût du capital.

Mais cette distinction est ténue.
Nous allons brièvement mettre en perspective quelques difficultés qu'il peut être pratique d'éclairer afin que la classification dans l'une ou l'autre des catégories de biens et services puisse être davantage intelligible.
Nous retenons un critère permettant d'opérer une plus ou moins satisfaisante distinction: l'unité de production doit être le plus clairement possible définie.
Outre son apport à la classification des biens et services,cette précision facilite intellectuellement la réponse à la question relative à la possibilité d'occurrence du phénomène du substitution entre les biens.
Car la classification n'est pas figée dans le temps,nous y revenons ci-dessous.
Ce phénomène de substitution plus ou moins important entre les biens intensifs en travail et les biens intensifs en capital est fort utile à l'analyse du modèle.

Un bien intensif en travail doit vérifier qu'il réduit le coût du facteur travail ou ce qui revient au même qu'il augmente la productivité du facteur travail.
Un bien intensif en capital doit vérifier qu'il réduit le coût du facteur capital ou ce qui revient au même qu'il augmente la productivité du facteur capital.
Mais là encore,la distinction reste ténue en pratique:
Partons d'un exemple simple : Une nouvelle génération d'imprimantes utilisée par un seule personne plus efficiente que la précédente (30 copies/mn) permet par exemple de réaliser 45 copies noir et blanc par minute.
La productivité du capital aura augmenté grâce à cette invention si l'imprimante,pour simplifier,ne change pas de prix.
La productivité du travail augmente aussi,si la même personne et elle seule utilise l'imprimante nouvelle.
Si deux personnes utilisent l'imprimante,la productivité du travail baisse de moitié.
La question relative à la substitution reviendra dans l'exposé mais on peut rappeler déjà que substitution capital/travail joue en faveur de la productivité du travail et en défaveur de celle du capital.

Il faut cependant noter que les biens de type TIC se substituent plus aisément au facteur travail que ne le font les autres biens.
Prenons par exemple le processus Bessemer qui est un procédé d'affinage industriel de la fonte pour l'obtention de l'acier et qui en raison de bas son coût de production permit à partir de 1860 d'augmenter la production industrielle de façon significative.
Ce type d'invention n'affecte pas la productivité du travail dans la mesure où la production d'acier relève du convertisseur Bessemer et est l'unité de mesure (au numérateur) de la productivité de celui-ci.
Prenons également l'exemple de la machine à vapeur durant la révolution industrielle, qui est un moteur thermique à combustion externe,et qui transforme l'énergie thermique contenue dans la vapeur d'eau qui arrive par sa ou ses chaudières en énergie mécanique. L'unité de production est l'énergie mécanique.
La machine à vapeur est supplantée de nos jours par le moteur à explosion et le moteur électrique dans la fourniture d'énergie mécanique.
Là encore,la nature de l'unité de production et l'exigence de rendements énergétiques font que le phénomène de substitution capital/travail ou son inverse n'est pas envisageable.
Ces deux exemples d'invention et leurs caractéristiques permettent de les ranger dans la catégorie bien intensifs en capital.
Elles ont en dénominateur commun,la thèse de Habakkuk[6] selon laquelle la conjugaison de la rareté du facteur travail et des salaires élevés a conduit à de nombreuses inventions durant le XIX^ème^ siècle aux Etats-Unis par rapport à la Grande Bretagne.
Durant cette période,d'importantes destructions d'emplois qualifiés eurent lieu et furent remplacés par des machines.
Puis,une fois introduites,ces inventions ne constituèrent plus tellement une voie de remplacement du facteur travail -qui a pourtant continué à se renchérir-mais de substitutions intergénérationnelles d'inventions de plus en plus efficientes.
C'est donc du capital qui remplace du capital et qui possède de meilleurs rendements productifs.Entre temps les niveaux de salaires passent à la trappe.
Mais il n'en est pas ainsi au XX^ème^ siècle: le progrès technique ne produit pas exactement les mêmes effets:
En 1971,aux Etats-Unis,le rapport entre un travailleur appartenant au 90^ème^ décile le plus élevé en termes de salaires et le travailleur ayant le salaire le plus élevé parmi le premier décile le plus bas était de 265.En 1995,il de 366.

Il y a un large consensus sur l'apport du progrès technique à cette évolution.
Le progrès technique durant le XX^ème^ siècle,en particulier la diffusion des TIC,promeut les travailleurs qualifiés,remplace plusieurs activités préalablement assurées grâce aux travailleurs moins qualifiés et accroît la demande de qualifications.
Les ordinateurs,les semi-conducteurs,les matériels de communication,les imprimantes et les produits TIC de façon générale ont comme but ultime l'augmentation ou l'amélioration non pas d'une production propre comme l'acier ou l'énergie mécanique mais de permettre au facteur travail de produire plus ou mieux.
C'est à ce titre que nous les rangeons dans la catégorie des biens intensifs en travail et toutes les fois qu'un bien ou un service s'apparente davantage à ces attributs (son

[6] Pour une discussion sur la catégorie des inventions visant à réduire le coût du travail,on peut voir : *Habakkuk.H.J,"American and British Technology in the Nineteenth Century: Search for Labor Saving Inventions",Cambridge University Press [1962] pp 157-159*

introduction avantage la productivité du travail,n'a pas de production propre…),il sera considéré dans la catégorie "biens intensifs en travail".
La rigidité de cette classification n'est qu'apparente:
D'une part la distinction entre la notion de bien intensif en capital et bien intensif en travail est délicate et d'autre part cette délicatesse est accrue,nous l'avons ébauché,selon les périodes considérées (ce qui signifie que l'élasticité de substitution entre ces deux catégories de biens est variable).
En outre dans le cadre d'un modèle théorique,la conceptualisation de la classification et son interprétation compte au moins autant que la classification elle-même.
La modélisation doit être donc interprétée à la lumière de cette définition -mais avec prudence- car c'est justement le moyen par lequel celle-ci est prise en considération.
Par exemple,la production d'un bien intensif en travail nécessitera du facteur travail alors que celle d'un bien intensif en capital requerra du facteur capital.
L'avantage d'une telle modélisation est de permettre de rendre intuitive la nature du progrès technique qui prévaudra en régime équilibré.
En effet,deux sources sont à l'origine de la production de biens intensifs en capital: l'accumulation de capital et le progrès technique sur le capital tandis qu'il n'y a qu'une seule source augmentant la production de biens intensifs en travail à savoir le progrès technique portant sur le travail.
Dès lors,pour être en régime équilibré,il est nécessaire qu'il n'y ait pas de progrès technique net sur le capital sachant l'existence de l'accumulation de capital.
Nous montrons en annexe que les formulations alternatives du progrès technique portant sur le travail (et sur la capital) c'est-à-dire celles que l'on retrouve chez Grossman et Helpman [1991 a,b] et Aghion-Howitt [1992] modifient la modélisation des fonctions de production mais livrent des résultats identiques.

1 Le modèle

1.1 Présentation générale

$$Y = F(MK, NL)$$

Lorsque le progrès technique porte sur le facteur capital, seul M augmente.
Comme nous venons de le dire,les biais de progrès technique sont principalement modélisés de deux façons :
Soit par l'introduction de nouveaux biens et services intensifs en ces facteurs c'est-à-dire dont la production et l'utilisation sollicite relativement plus ces facteurs,soit par l'introduction de nouvelles techniques de production améliorant directement la productivité de ces facteurs.
On sait ce que cela signifie ne serait-ce qu'en se rappelant par exemple le sens qui en est donné dans le modèle suédois[7] des échanges internationaux:
Un bien ou un service est dit intensif en un facteur donné lorsque qu'il est requis d'utiliser relativement plus de ce facteur dans sa fabrication.
C'est l'idée de proportion des facteurs:
En présence de deux facteurs de production,le capital et le travail et deux biens A et B qui valent 1 € une fois produits chacun,le bien A est réputé relativement plus intensif en capital si sa fabrication requiert 30 centimes d'€ que celle de B n'en requiert que 20.

[7] Modèle d'Heckscher-Ohlin ou modèle de proportion des facteurs

Le modèle qui s'inspire d'Acemoglu utilise la première modélisation et suppose qu'un biais de progrès technique sur le capital par exemple, implique l'augmentation du nombre M de biens intensifs en capital mais l'intensité y est présentée en termes absolus et non en termes relatifs.
Dit autrement,la technique de production d'un bien intensif en capital sollicite exclusivement du facteur capital.La remarque est valable pour le facteur travail.
Cette façon de modéliser n'est pas très intuitive (cf supra) pour qui est habitué à travailler avec le modèle de proportion des facteurs où on nous apprend qu'un bien intensif en facteur travail en contient relativement plus qu'un bien intensif en capital.
Si nous prenons par exemple des ordinateurs,nous les définirions comme étant des biens intensifs en travail mais pas dans le sens que leur donne la théorie du commerce international.
Ici,le terme intensif cherche à saisir non pas l'intrant nécessaire à la production (même si la modélisation le fait apparaître ainsi) du bien mais plutôt l'intrant nécessaire à l'utilisation du bien une fois produit.
C'est ainsi qu'il faut entendre les choses lorsqu'on dira qu'un bien ou un service est intensif en travail ou en capital.
Cela a été détaillé également dans la sous-section précédente.

1.2 Le fait stylisé relatif aux parts factorielles

Il est utile de rappeler que sur la longue période les parts relatives de capital et de travail dans le produit ou de manière équivalente la part relative de capital par rapport au travail dans le revenu sont assez constantes.
Les figures a et b ci-dessous illustrent respectivement les parts du facteur travail dans les PIB américain et français sur environ 70 et 85 ans.
L'observation de ces figures ne laisse pas entrevoir une tendance confirmée à la hausse ou à la baisse de la part du facteur travail (donc du facteur capital évidemment) dans le PIB aussi bien aux Etats-Unis qu'en France.
On peut néanmoins observer que sur certaines périodes plus ou moins longues,il y a d'importants mouvements dans la part du travail.
Ainsi pendant la seconde guerre mondiale et les cinq ou six années qui suivirent,on peut voir une hausse prononcée de la part du facteur travail (baisse prononcée de la part du facteur capital) plus marquée en France notamment.
Cependant,un retour plus ou moins raide vers une stabilité autour de 2/3 pour le facteur travail est également observé,ce qui illustre qu'hormis des mouvement plus ou moins importants sur des périodes plus ou moins longues,on retrouve sur long terme approximativement ce ratio.
Ci-dessous, les figures a et b:

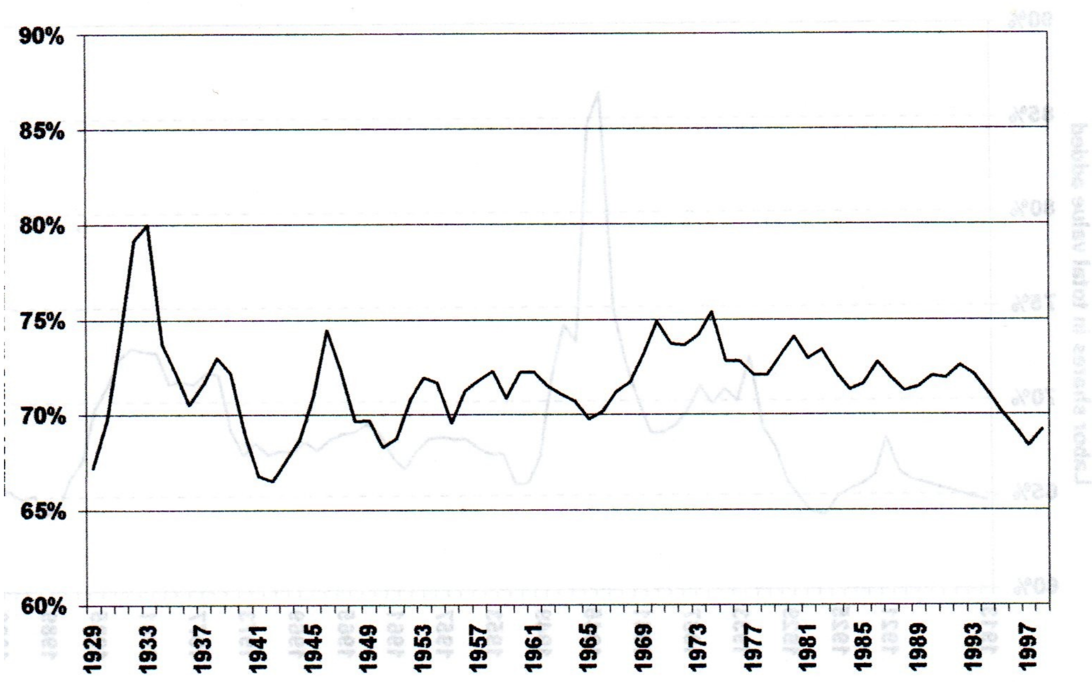

Figure a: Source: ***National Accounts,NIPA Table 1,16*** **[2001]**

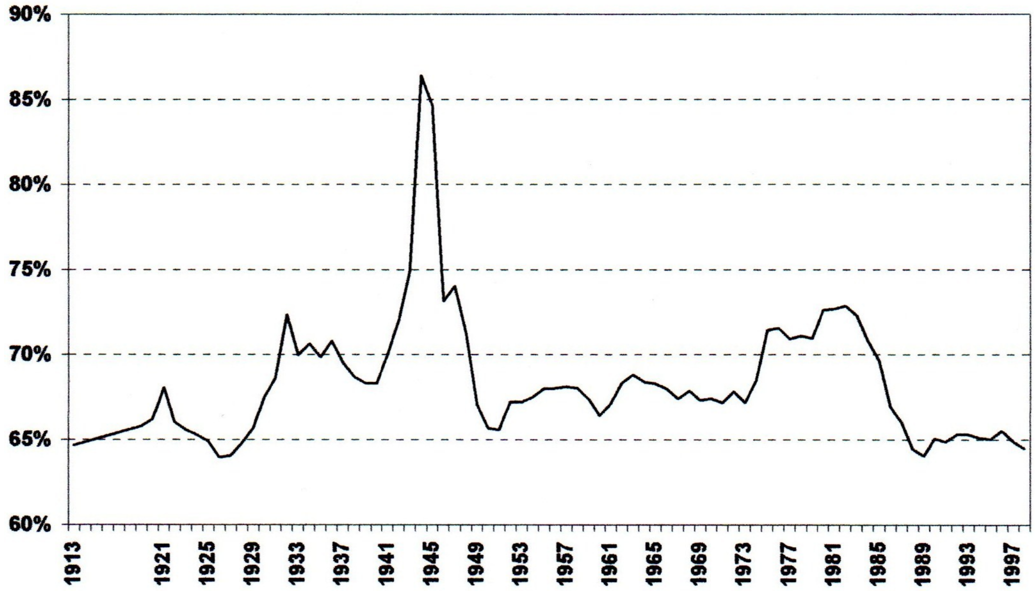

Figure b: Source: Piketty ***"Income Inequality in France"*** **Cepremap [2001]**

Lorsque l'on raisonne avec une technique de production de type Cobb-Douglas,la régularité observée est retrouvée et on peut évoquer l'exercice de comptabilité de la croissance vérifie à long terme cette régularité mais dans un modèle de croissance,elle pourrait s'expliquer intuitivement (nous y reviendrons longuement) ainsi :

Partant du constat qu'à long terme,il existe deux manières d'augmenter la production de bien intensif en capital (accumulation du capital et progrès technique en direction du facteur capital) et une seule pour la production de biens intensifs en travail (progrès technique sur le facteur travail) on peut en déduire qu'en régime de croissance équilibrée,le progrès technique sera uniquement harrodien.

Réaliser du progrès technique tel que cela est proposé dans la modélisation choisie par Acemoglu consiste à produire de plus en plus de biens intensifs en travail.

Le coût du travail varie selon que l'offre de biens intensifs en travail est abondante ou non.Le coût relatif du travail varie ainsi selon que le nombre de biens intensifs en travail dans l'économie est relativement plus ou moins important que l'offre de biens intensifs en capital dans cette économie.

Là on retrouve typiquement le raisonnement sous-jacent du modèle d'Hecksher-Ohlin ou modèle suédois à savoir que l'abondance d'un bien signifie que son coût relatif est de moindre importance.

Dans une configuration où l'élasticité de substitution entre biens intensifs en travail et biens intensifs en capital est faible,une plus grande quantité de biens intensifs en travail signifie que le coût relatif du capital est élevé.

En effet,une quantité relativement plus grande de biens intermédiaires intensifs en travail,signifie que la productivité relative du travail est à l'échelle macroéconomique plus importante que celle du capital.

Ainsi,en utilisant les mêmes quantités de biens intermédiaires qu'avant l'augmentation de leur nombre,on atteindrait une isoquante de niveau plus élevée.

Puisque le coût relatif du capital est élevé,la part relative du capital dans l'output l'est également par conséquent.La part relative du capital est simplement le rapport l'élasticité du produit par rapport à l'intrant capital à l'élasticité du produit par rapport par rapport à l'intrant travail.Si l'on suppose que les facteurs sont rémunérés à leur productivité marginale,c'est donc le rapport $\frac{rK}{wL}$ avec r le taux d'intérêt pour approximation du coût d'usage du capital,w,le salaire pour approximer le coût salarial total,K,le facteur capital et L,le facteur travail.

Ceci induit du progrès technique en direction du capital,ce qui augmente le nombre de biens intensifs en capital qui réduit le prix relatif du capital et par conséquent sa part relative.Son poids dans l'output se réduit.

Dans une configuration où l'élasticité est forte on substituera des biens intensifs en travail aux biens intensifs en capital,ce qui rétablit l'équilibre de la part factorielle et donc des poids respectifs dans l'output.

On voit donc un mécanisme de rééquilibrage des parts factorielles qui apparaît dans les deux cas.

Au centre de ce raisonnement on retrouve comme le prédisait Hicks en 1932[8] les germes de la théorie du progrès technique induit par les prix.

« A change in the relative prices of the factors of production is itself a spur to invention,and to invention of a particular kind directed to economizing the use of a factor which has become relatively expensive »

Mais une asymétrie existe et doit être précisée pour comprendre intuitivement les propriétés du régime de croissance équilibrée:

[8] *The Theory of Wages pp 124 -125*

C'est que,comme déjà annoncé,le facteur capital s'accumule alors que le facteur travail ne s'accumule pas.
Au total,en régime de croissance équilibrée, la productivité du capital ne doit pas changer tandis que celle du travail est augmentée par deux moyens : le progrès technique biaisé en direction du facteur travail et l'accumulation du capital qui peut occasionner un effet de *"capital deepening"* venant amplifier le mouvement des salaires.

Pour le voir,il suffit d'appliquer l'asymétrie signalée au ratio $\frac{rK}{wL}$.

Nous reviendrons de nouveau,mais plus en avant sur cette discussion.
Ce résultat est conforme à celui décrit par Cette.G[9] à propos de l'impact des nouvelles technologies de l'information sur les productivités potentielles des facteurs capital et travail.
Les auteurs précisent en outre que la productivité potentielle du capital peut même se retrouver amoindrie dans le cadre d'une économie peu productrice de TIC.
Ce dernier point inhérent à la méthode de comptabilité de la croissance n'est à ce stade pas pris en compte pour des raisons de clarté du raisonnement puisque,ainsi que cela sera démontré,la trajectoire équilibrée de l'économie implique la constance de la productivité du capital et qu'il est plus pratique de commencer par la référence que constitue la notion de croissance équilibrée.
Les questions de croissance de type équilibrée,n'intéressant pas au premier chef les travaux de comptabilité de la croissance,il peut être alors utile d'étudier ce qu'il se passe dans le régime transitionnel pour prendre en compte les conséquences d'une économie peu productrice de TIC sur les productivités des facteurs et sur les parts factorielles.

Partant du lien entre diffusion des TIC et amélioration de la productivité du travail,nous cherchons à montrer que moyennant une forme particulière de la modélisation endogène du progrès technique portant le facteur travail,il est possible de prédire qu'à long terme l'introduction de produits TIC est compatible avec un régime de croissance équilibrée lorsque l'élasticité de substitution est inférieure à 1.Lorsque l'élasticité de substitution n'est pas inférieure à 1,on verra qu'un régime de croissance équilibrée ne saurait plus avoir lieu.
En partant de situations où le rythme de progrès technique est différent entre secteur TIC et secteurs Hors-TIC,on peut voir comment,selon le niveau des élasticités,la part des TIC dans le produit évolue.
Ces résultats nous permettent de répondre à une incertitude sur l'avenir de la part de ces produits dans la valeur ajoutée,à savoir la question portant sur une éventuelle décroissance continue de celle-ci[10] qui résulterait d'une saturation progressive en produits TIC de nature à ramener l'élasticité-prix de la demande en ces produits à un niveau inférieur à 1 alors qu'elle est actuellement au-dessus de 1.
Cela atténuerait l'effet quantité par rapport à l'effet baisse des prix de ces produits.
En effet lorsque l'élasticité-prix de la demande est inférieure à 1,une baisse des prix des produits TIC,entraîne une augmentation moins que proportionnelle de produits TIC,ce qui signifie une contribution continûment décroissante des TIC à la

---

[9] Revue d'Economie Politique n° 1 Janvier-Mars 2004
[10]Voir Oulton.N *"ICT and Productivity Growth in the UK",Bank of England [2001] pp 46-48* ou Cette.G,Mairesse.J et Kocoglu.Y "Diffusion des TIC et croissance potentielle" Revue d'Economie Politique [2004] pp 77-97 pour une lecture de certaines incertitudes liées à l'ampleur et à la longueur de la diffusion des TIC dans les économies.

croissance.A ce sujet,nous renvoyons le lecteur à un encadré du chapitre premier pour voir comment une diminution des prix plus importante que la hausse des quantités,réduit la part des TIC dans la croissance.

Pour approcher ce résultat,nous proposons de mesurer la part des TIC dans la valeur ajoutée en observant l'effet des TIC sur la productivité du travail.

Dans un cadre théorique cette question n'est pas aisée: Oulton [cf note 10 et page 48] évoque la question de l'élasticité de substitution des produits TIC aux autres intrants par rapport à laquelle porte l'incertitude à long terme.Marshall [1920][11]donne l'exemple de la demande d'eau dont l'élasticité-prix de la demande est plus élevée pour des niveaux des prix élevés et devient inélastique au fur et à mesure que les besoins sont satisfaits.Oulton souligne la difficulté de trouver une fonction de demande ayant ces propriétés tout en restant compatible avec la stabilité passée des parts factorielles.

Il souligne un peu plus loin (page 49) que la réponse sur la tenue à long terme de l'élasticité de substitution des TIC aux autres intrants peut être abordée sous l'angle de la nature du progrès que connaîtront ces produits.

Il semble se dégager que l'auteur suggère que l'évolution positive de la part des produits TIC dans le revenu dépendra de la nouveauté des biens et services rendus par rapport à leur qualité.

Un modèle de progrès technique de variété semble se prêter davantage à la perspective d'Oulton.

Si l'industrie TIC arrivait à soutenir un rythme d'innovations dans de nouveaux produits plutôt que dans l'amélioration de produits existants (il évoque l'exemple une accélération de la vitesse des communications courriels pour illustrer l'amélioration de produits existants),il y a lieu de conjecturer un maintien ou une croissance de la part de ces produits.

Nous proposons d'introduire cette idée dans un modèle de progrès technique endogène de variété qui consiste donc en l'accroissement du nombre existant de biens et services TIC.

Nous proposons de le faire en divisant le capital total en capital TIC et en Hors TIC ou ce qui est équivalent entre biens intensifs en travail et biens intensifs en capital.

Ceci peut se faire en adoptant une formalisation particulière du progrès technique améliorant le facteur travail: Au lieu de considérer comme cela se fait dans la majorité des cas,que le progrès technique améliore directement le rendement du facteur travail grâce à des nouvelles méthodes de production par exemple ou à des méthodes améliorées,nous considérons comme le fait Acemoglu que le progrès technique améliorant le rendement du travail consiste en l'introduction de nouveaux biens qui sont utilisateurs du facteur travail.Ainsi en est-il du capital TIC.

Toutes les fois que l'introduction d'un bien ou d'un service va dans le sens d'une amélioration de la productivité du travail,il sera considéré comme bien intensif en travail et réciproquement s'agissant des biens intensifs en capital.

Il en ressort qu'à condition que l'élasticité de substitution entre les biens TIC et les autres biens soit inférieure à 1,la part des TIC dans le produit pourrait ne pas diminuer en dépit de la diffusion de ces produits.

Mais ce résultat est un résultat d'équilibre,donc purement théorique et moins intéressant pour la comptabilité de la croissance.

En revanche,il permet d'expliquer la question de l'équilibre par des comportements microéconomiques standards (maximisation de profits,concurrence pure et

[11] *"Principles of Economics,(Eigth edition,1966),*cité par Oulton [2001]

parfaite).Le modèle sous-jacent de la diffusion qui est utilisé consiste en un modèle de progrès technique de variété des biens intermédiaires.
En dehors de la question de l'équilibre,il faut envisager l'étude du régime transitionnel qui est également d'intérêt en ce qu'elle permet notamment de voir ce qu'il se passe quelle que soit la valeur de l'élasticité-prix de la demande et quelle que soit la nature du régime de croissance (pas d'exigence de croissance équilibrée) sans sacrifier la question de la stabilité de l'équilibre.

Ce chapitre vise à réexaminer dans quelle mesure les résultats de la comptabilité de la croissance relatifs à la stabilité sur long terme des parts factorielles peuvent avoir un fondement microéconomique à travers un exercice de modélisation endogène du progrès technique.
Simultanément,il se veut une tentative de réponse aux questions relevant de l'incertitude sur l'impact futur des produits TIC dans les économies d'où l'étude des régimes transitionnels de l'économie.
Une analyse détaillée du régime de croissance équilibrée sera menée dans une première étape.Elle est indispensable à deux titres:
Premièrement,le but de la modélisation endogène du progrès technique qui été adoptée est une tentative de validation de l'effet stylisé relatif à la stabilité des parts factorielles sur longue période.
Cette stabilité renvoie à l'équilibre de long terme de l'économie.

Secondement,l'étude de l'équilibre est indispensable pour l'analyse des régimes de transition.C'est une situation référentielle.
Une fois les enseignements du régime d'équilibre connus,il sera intéressant de faire des rapprochements avec des situations comme l'essor des TIC et leur impact du la stabilité des parts factorielles,donc l'évolution de leur poids dans le revenu.

A défaut de prédire l'évolution de la part des produits TIC dans le revenu par l'utilisation par exemple d'une fonction de demande de produits TIC à élasticité décroissante comme le suggère Oulton,l'analyse qui sera effectuée,permet toutefois de répondre autrement.
En montrant la nature (biais) et le rythme du progrès technique qui serait compatible avec la stabilité factorielle ou l'instabilité,elle fournit des enseignements sur les comportements microéconomiques des agents qui seraient adéquats tout en laissant en jeu la question cruciale de l'élasticité de substitution entre les produits TIC et les autres produits.

2 Modélisation du progrès technique sous forme de nouveaux biens intensifs en facteur travail ou en facteur capital

Le progrès technique qui est introduit dans ce modèle prend la forme d'élargissement du nombre de biens intensifs en facteur travail et /ou en facteur capital.
Nous pouvons alors définir la nature du progrès de la façon suivante :

Un progrès sera qualifié d'Harrodien lorsqu'il aboutit uniquement à l'élargissement de l'ensemble n des biens intensifs en travail.De façon équivalente,on pourra dire qu'il est *«Labor-augmenting technical change »* (Latc)

Un progrès sera qualifié de Solowien lorsqu'il aboutit uniquement à l'élargissement de l'ensemble m des biens intensifs en capital.De façon équivalente,on pourra dire qu'il est *«Capital-augmenting technical change »* (Catc)

Un progrès sera qualifié d'Hicksien[12] lorsqu'il aboutit à l'élargissement simultané des ensembles n et m.

L'économie dont il est question se compose de L travailleurs non qualifiés affectés au secteur de la production finale et de S « scientifiques » affectés au secteur de la recherche & développement.
Ces deux secteurs ne sont pas en concurrence pour les mêmes travailleurs.

2.1 Le modèle de base: Les caractéristiques des agents

L'output global est une combinaison CES des quantités Y_{TIC-L} et Y_{HTIC-K} de biens finals TIC intensifs en travail L et des biens Hors-TIC intensifs en capital K, dont l'élasticité de substitution $\varepsilon \in [0,\infty[$:

Le secteur de la consommation

Les préférences de l'agent représentatif illustrent l'aversion constante au risque et sont donc de type CRRA :

[12] De manière générale, nous savons que par définition, suite à du progrès Hicksien l'égalité des produits marginaux du travail et du capital est requise.
Rien n'assure cette égalité dès lors que l'orientation du progrès technique est soumise et donc orientée par la contrainte de maximisation du profit.
C'est en ce sens que nous estimons que le progrès technique n'est qu'exceptionnellement rigoureusement Hicksien.Il est par conséquent quasi-Hicksien.Cette légère nuance terminologique prendra davantage de sens lors de l'étude du régime en déséquilibre, soit en transition.

(1) $$\int_0^\infty \frac{C(t)^{1-\theta}-1}{1-\theta}\exp^{-\rho t}\,dt$$

où $C(t)$ est la consommation à la date t et θ l'élasticité instantanée de substitution intertemporelle de la consommation.

Encadré 2.2: L'élasticité instantanée de substitution intertemporelle de la consommation et la forme isoélastique CRRA

Soient deux instants t et s : L'élasticité de substitution intertemporelle de la consommation est définie par :

$$\theta_{C_t/C_S} = \frac{\partial \ln \frac{C_t}{C_s}}{\partial \ln TMS_{C_t/C_t}} = \frac{\partial \ln C_t - \partial \ln C_s}{\partial \ln \frac{U'(C_s)}{U'(C_t)}} = \frac{\frac{\partial C_t}{C_t} - \frac{\partial C_s}{C_s}}{\frac{U''(C_S)\partial C_s}{U'(C_s)} - \frac{U''(C_t)\partial C_t}{U'(C_t)}}$$

$$= \frac{\frac{\partial C_t}{C_t} - \frac{\partial C_s}{C_s}}{\frac{U''(C_s)\partial C_s}{U'(C_s)}\frac{C_s}{C_s} - \frac{U''(C_t)\partial C_t}{U'(C_t)}\frac{C_t}{C_t}}$$

La modification dans le dénominateur de la dernière expression ne change en rien le résultat mais nous permet d'envisager une simplification avec le numérateur.
Par ailleurs on a :

$$\lim_{s\to t}\frac{U''(C_s)C_s}{U'(C_s)} = \frac{U''(C_t)C_t}{U'(C_t)}$$

$$d'où$$

$$\lim_{s\to t}\theta_{C_T/C_S} = -\frac{U'(C_t)}{U''(C_t)C_t} = \theta$$

θ est l'élasticité de substitution intertemporelle instantanée de la comsommation ou encore élasticité de l'utilité marginale de la consommation.

Que se passe-t-il lorsque θ = 1 ?
La CRRA est alors une forme indéterminée (0/0).En posant $u = 1-\theta$,la partie indéterminée de la fonction se re-écrit :

$\frac{C^u - 1}{u} = \frac{f(u)}{u} = \frac{0}{0}\ si\ \theta = 1$ (d'où l'utilité d'introduire le « 1 » dans la fonction et par application de la règle de l'Hôpital :

$\frac{f'(u)}{1} = \left(\exp^{u \ln C} - \exp^{1}\right)' = \left(u \ln C\right)' \exp^{\ln C^U} = C^u \ln C = \ln C \; quand \; u = 0$

Par conséquent lorsque l'élasticité est unitaire,on prend comme CRRA :

$\int_0^{\infty} (\ln C)(\exp^{-\rho t})dt$

Lorsque l'élasticité est nulle la CRRA devient linéaire.

La contrainte de budget de l'agent représentatif implique que ses dépenses de consommation et d'investissement ne dépassent pas ses ressources :

(2) $$C + I = wL + rK + w_s S + \Pi = Y$$

avec I l'investissement, $w \; et \; w_s$ les salaires des « travailleurs » et des « scientifiques », K le stock de capital et Π le profit reçu par les ménages détenteurs d'actions dans les entreprises de la recherche.

(3) $$Y = \left[\gamma \, Y_{TIC-L}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1-\gamma) Y_{HTIC-K}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$$

Pour le moment la dynamique d'accumulation est supposée par simplification ignorer la dépréciation. On a donc:

(4) $$\dot{K} = I$$

On approxime en outre le coût d'usage du capital par le seul taux de l'intérêt.
Nous donnons ci-après la définition précise du coût d'usage du capital.

Encadré 2.3 : Définition et calcul du coût d'usage du capital

Le coût d'usage d'un équipement correspond au prix à payer pour en bénéficier pendant la période t en utilisant un service de crédit-bail ou bien par la simple location de celui-ci.

Le coût d'usage d'un équipement doit intégrer son prix $\left(P_t^i\right)$,les intérêts sur sa valeur $\left(iP_t^i\right)$ et son prix de revente qui doit lui-même prendre en compte le taux d'inflation et la dépréciation qu'on évoquait.
Le calcul du coût d'usage résulte du programme de maximisation intertemporelle d'une firme. On se place dans un cadre concurrentiel dans lequel la fonction de production de la firme est décrite par $Y = F(K, L)$ avec Y, K, L respectivement l'output, le facteur capital et le facteur travail.
En cherchant à maximiser la valeur actuelle de ses profits futurs,la firme doit satisfaire au programme intertemporel suivant :

$$\underset{L,K}{Max} \; V_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^{t+1}} \left(P_t Y_t - w_t L_t - P_{It} I_t\right)$$

sachant que:

$Y_t = F(K_t, L_t)$ et $I_t = K_{t+1} - (1-\delta)K_t \; avec \; K_0$ donné.
La résolution de ce programme (qui ne nécessite ni Lagrangien,ni Hamiltonien) nous fournit les conditions marginales suivantes:

$$(1+i)^{-(t+1)}\left(P_t F_L^{'} - w_t\right) = 0 \qquad (1)$$
$$(1+i)^{-(t+1)}\left(P_t F_K^{'} + P_{It}(1-\delta) - (1+i)P_{I(t-1)}\right) = 0 \quad (2)$$

De la première condition, on retrouve qu'au point optimal le salaire réel doit être égal à la productivité marginale actualisée du travail.C'est la condition habituelle qui veut que la firme poursuive l'embauche jusqu'au moment où la contribution actualisée du travailleur supplémentaire égalise sont coût réel.
La deuxième condition est équivalente à:

$$P_t F_K^{'} = P_{It}\left[(1+i)\frac{P_{I(t-1)}}{P_{It}} - (1-\delta)\right]$$

En notant $\pi_t = \dfrac{P_{It}}{P_{I(t-1)}} - 1$,le taux d'inflation des biens d'investissement entre deux dates et en supposant que celui-ci est ici constant - pour illustrer le fait que les prix considérés sont posés constant dans la méthode de comptabilité de la croissance ce qui permet de mesurer la croissance en volume ou réelle -on peut simplifier la deuxième condition marginale comme ceci:

$$P_t F_K^{'} = P_{It}\left[\frac{1+i}{1+\pi} - 1 + \delta\right]$$

Nous pouvons utiliser une approximation (en négligeant la valeur de $\delta\pi$ dans le calcul):

$$F_K^{'} \cong \frac{P_{It}}{P_t}(i + \delta - \pi) \qquad (3)$$

(3) est le coût d'usage réel d'une unité de facteur capital.

Secteur de la production de biens finals

Les différents biens finals intensifs en travail et en capital sont produits en concurrence parfaite selon une technique CES combinant à des degrés variables et selon une élasticité de substitution $\upsilon = \dfrac{1}{1-\beta}$ des biens intermédiaires intensifs en travail et en capital achetés auprès du secteur monopoleur des biens intermédiaires.

(5) $$Y_{TIC-L} = \left[\int_0^n yticl(i)^\beta \, di \right]^{\frac{1}{\beta}} \quad \text{et} \quad Y_{HTIC-K} = \left[\int_0^m yhtick(i)^\beta \, di \right]^{\frac{1}{\beta}}$$

où $yticl(i)$ *et* $yhtick(i)$ sont les quantités du bien intermédiaire tic i et htic i intensifs respectivement en facteur travail et en facteur capital utilisées dans la production des biens finals.
Etant donné que ces biens intermédiaires sont supposés substituables à l'intérieur de chacun des deux secteurs,cela signifie que l'élasticité de substitution doit être supérieure à 1[13],ce qui est le cas dès lors que le paramètre β est compris dans l'intervalle [0,1[.

Secteur de la production de biens intermédiaires

Les firmes de ce secteur achètent au secteur de la recherche le brevet approprié qui permettra à chacune d'elles de produire,en monopole,le bien intermédiaire i selon une technique linéaire :

(6) $$yticl(i) = l(i) \quad et \quad yhtick(i) = k(i)$$

où $l(i)$ *et* $k(i)$ sont les quantités de facteurs travail et capital utilisées respectivement pour le secteur des biens intermédiaires TIC et pour le secteur des biens intermédiaires hors TIC.
La condition d'équilibre sur les marchés respectifs des facteurs utilisés implique:

(7) $$\int_0^n l(i)di = L \quad et \quad \int_0^m k(i)di = K$$

Secteur de la recherche

Il s'agit ici de modéliser le processus par lequel l'économie engendre des innovations de biens intensifs en facteur travail et en facteur capital.
En suivant un raisonnement dans l'esprit des modèles de Romer [1990] et Rivera-Batiz et Romer [1991],le processus d'accumulation des innovations de biens intermédiaires est :

(8) $$\frac{\dot{n}}{n} = b_{ticl} S_{ticl} - \delta \quad et \quad \frac{\dot{m}}{m} = b_{htick} S_{htick} - \delta$$

S_{ticl} *et* S_{htick} représentent le nombre de chercheurs travaillant à l'amélioration des biens intermédiaires de type *n ou m.*
La condition d'équilibre sur le marché du travail pour ces "scientifiques" est :

$$S_{ticl} + S_{htick} = S$$

[13] Une élasticité de substitution supérieure à 1 ou une élasticité-prix directe de la demande de biens intermédiaires adressée au monopoleur négative et inférieure à 1 ou encore une élasticité-prix croisée positive et supérieure à 1 pour signifier la forte substituabilité entre les biens considérés.

δ est un taux d'obsolescence des techniques existantes.
Il n'est pas différencié entre les deux secteurs.
Dans les équations (8),on utilise le concept de Frontière des Possibilités d'Innovation (FPI) de Kennedy.C [1964][14].

Le progrès technique consiste à repousser les FPI que sont $\frac{\dot{n}}{n}$ et $\frac{\dot{m}}{m}$.

La première consiste donc à accroître le nombre de biens intermédiaires TIC,tandis que la seconde consiste à accroître le nombre de biens intermédiaires n'appartenant pas au secteur des TIC.

En fonction du rapport à 1 des FPI, le progrès technique sera considéré comme Hicksien,Harrodien ou solowien.

b_{ticl} et b_{htick} sont les taux constants de progrès technique dans le secteur des tic et dans le secteur hors-tic auxquels des chercheurs s'attelant à la R&D parviennent donc à "inventer" les nouveaux biens intermédiaires.

En réécrivant les équations (8) comme ci-dessous:

$$\dot{n} = b_{ticl} S_{ticl} n - \delta n \quad et \quad \dot{m} = b_{htick} S_{htick} m - \delta m$$

On observe plus clairement que le transfert ou la diffusion des connaissances intra-sectorielles est du type *"standing on the shoulders of giants"*[15] toutes choses égales par ailleurs c'est-à-dire si $\delta n < bS$ pour chacun des deux secteurs.
Enfin l'hypothèse de libre entrée dans le secteur de la recherche est retenue.

Encadré 2.4 : Comparaison avec la formalisation de la R&D chez Rivera-Batiz et Romer [1991]

Ce traitement des flux de connaissance se retrouve également dans les travaux de Rivera-Batiz et Romer[16] sur le phénomène d'économie d'échelle généré par l'intégration économique au niveau mondial.
Dans leur secteur de la recherche,il proposent deux formes fonctionnelles pour les FPI.C'est leur première spécification qu'ils qualifient de *"knowledge driven specification"* qui est proche de celle utilisée ici.En effet dans cette spécification,la fonction de production du secteur de la recherche se distingue de celle du secteur de production de bien intermédiaires et final en ce que le travail non qualifié (ici dénommé "travailleurs" et le capital physique (ici les biens intermédiaires) n'y jouent aucun rôle.Le transfert des connaissances (*spillovers*) intra-sectorielles dans le secteur de la recherche est du type *"standing on the shoulders of giants".*
La frontière des possibilités de production dans l'espace biens intermédiaires-finals et innovations est une courbe puisque les fonctions de productions dans les différents secteurs ne sont pas identiques.

[14] *"Induced Bias in Innovation and the Theory of Distribution",Economic Journal,LXXIV,pp 541-47*
[15] Expression imagée qui compare le chercheur à un nain juché sur les épaules d'un géant.Et qui est sur la pointe des pieds...en plus.
[16] Rivera-Batiz.L.A et Romer.P *"Economic Integration and Endogenous Growth" Quarterly Journal of Economics* pp 531-55.

Rivera-Batiz et Romer proposent également une deuxième spécification qu'ils qualifient de *"lab equipment model"* qui en revanche ne distingue pas entre inputs utilisés dans la recherche et inputs utilisés dans la production.
Le transfert des connaissances (*spillovers)* intra-sectorielles est nul.Dit autrement,la familiarité avec les connaissances scientifiques et techniques du passé,ne contribue en rien aux innovations présentes.
La frontière des possibilités de production dans l'espace biens intermédiaires-finals et innovations est une droite puisque les fonctions de productions dans les différents secteurs sont identiques.

Enfin aussi bien chez ces auteurs qu'ici, la diffusion intersectorielle dans la recherche est elle nulle.La diffusion entre le secteur de la recherche et le secteur de la production est également nulle quelle que soit la spécification retnue (ici,*"knowledge driven" ou "lab-equipment"*).
Une évolution dynamique par exemple de la FPI dans un secteur n'impacte en rien la dynamique de l'autre.
A titre d'information nous donnons ci-après FPI telles que nous les retrouvons chez Rivera-Batiz et Romer:
Pour la *"knowledge-driven specification"* on a:
$\dot{A} = \delta \; HA$ où H est une mesure du stock de capital humain utilise dans la recherche et A est une mesure des connaissance scientifiques générales et du savoir-faire passé.
Pour la *"lab equipment model"* on a:
$\dot{A} = BH^{\alpha} L^{\beta} \int_0^A x(i)^{1-\alpha-\beta} \, di$ où B est un paramètre constant d'échelle et $x(i)$ l'input physique i utilisé dans la recherche.

2.2 Commentaire des équations (5) et mise en évidence de la propriété de croissance endogène

Comme dans Barro et Sala-i-Martin[17],reprenant les analyses de Spence [76],Dixit et Stiglitz [77],Ethier [82] et Romer [87],la forme additive qui est utilisée au niveau des fonctions (5) traduit l'indépendance des produits marginaux des inputs.
Cette indépendance signifie aussi que de nouveaux biens intermédiaires coexistent avec les anciens.
Cette caractéristique est importante car elle permet de distinguer ces modèles de variété de l'analyse des innovations qualitatives décrivant un processus de "création destructrice" comme ceux de Schumpeter [34] ainsi qu'Aghion et Howitt.
Pour ces derniers modèles,au fur et à mesure que les produits de qualités supérieure sont inventés,les biens déjà existants deviennent obsolètes.
On voit d'après les fonctions (5) que le progrès technique consiste à augmenter les bornes supérieures des intégrales ce qui interroge sur l'effet de cette augmentation sur la croissance de l'output global.
Nous suivons l'analyse de Barro et Sala-I-Martin que nous appliquons à ce modèle ce qui permet de dégager le résultat suivant:
Dès l'instant où le coût d'acquisition (en fait la valeur du brevet octroyé par le secteur de la recherche) des différents biens intermédiaires est identique et que ceux-ci entrent symétriquement dans les équations (5),on montre qu'en dépit des

[17] *Economic Growth [1995] McGraw-Hill,New York*

rendements marginaux décroissants de chaque bien intermédiaire,les rendements d'échelle sont croissants si n ou m augmente.
En revanche si les quantités de biens intermédiaires utilisées augmentent à n et m constants,les rendements d'échelle restent constants.
Ces deux derniers points assurent que la fonction de production renferme une propriété conforme aux théories de la croissance endogène.
En analysant cependant cette propriété conforme,nous allons mettre en évidence une autre propriété,à savoir que dans le cas du présent modèle,la croissance endogène obtenue est à rendements d'échelle croissants par rapport au progrès technique.
Nous prenons le soin de la comparer aux modèles de croissance endogène mais avec rendements d'échelle constant par rapport au progrès technique.

Pour voir d'abord la propriété de croissance endogène de cette formalisation, anticipons un peu sur la suite,en posant qu'à l'équilibre (ce qui est vrai,chapitre 6 Barro et Sala-i-Martin [95],cf note 11) les quantités de chaque intrant utilisé dans les fonctions (5) sont identiques et notons cela comme:

$$\forall\ i\ y(i) = \bar{y}$$

Reportons dans l'une des équations (5) quel que soit le secteur,par exemple,celui des produits TIC :

$$Y_{TIC-L} = \left[n\bar{y}^{\beta}\right]^{\frac{1}{\beta}}$$

A partir de cette expression,supposons par exemple que nous triplions la quantité utilisée de chaque bien intermédiaire intensif en travail.
La production du bien final intensif en travail serait de $\left[3^{\beta}\right]^{\frac{1}{\beta}} Y_{TIC-L} = 3Y_{TIC-L}$ alors qu'en triplant le nombre de biens intermédiaires intensifs en travail,la production serait de $3^{\frac{1}{\beta}} Y_{TIC-L}$ ce qui compte tenu des valeurs possibles pour le paramètre est supérieur à $3Y_{TIC-L}$.
Intuitivement,ce bénéfice supérieur lorsque le nombre de biens intermédiaires augmente,traduit la décroissance des rendements de chacun des biens intermédiaires pris séparément.Ceci prouve la propriété de croissance endogène.

Il y a lieu cependant de remarquer que sous cette formalisation, l'accroissement des quantités utilisées de chaque facteur bien que permettant d'éviter la décroissance des rendements que nous connaissons en croissance exogène,aboutit toutefois à des rendements d'échelle constants en $y(i)$.
En outre,tout en évitant la décroissance que l'on vient d'évoquer,la formalisation exhibe des rendements d'échelle croissants par rapport au nombre de biens intermédiaires utilisés.

Ces deux rendements contrastent avec ceux que l'on obtient avec les formulations habituelles du progrès technique ce qui s'explique non pas par la fonction de production utilisée mais par son contenu.

Dans les modèles de progrès technique,la fonction de production du secteur final combine la plupart du temps deux ou plusieurs facteurs (capital,travail,capital humain…) avec des rendements d'échelle constants,ce implique que les rendements marginaux soient décroissants.
Or ici,comme nous allons le voir à la section suivante,la production de biens intermédiaires ne requiert par hypothèse qu'un seul facteur à rendement marginal et donc d'échelle constant (cf équation (6)).
C'est ce que traduit le contenu unifactoriel les équations (5) et qui explique qu'alors que les modèles de croissance endogène avec rendements d'échelle constants présentent des rendements marginaux décroissants, les rendements marginaux identiques ici à ceux d'échelle soient constants par rapport aux quantités utilisées de biens intermédiaires.
Les mêmes raisons expliquent l'obtention de rendements croissants lorsque le nombre de biens intermédiaires augmente alors que les modèles de progrès technique usuels aboutissent à des rendements d'échelle constants.

Ainsi l'augmentation continue de n ou m empêche la diminution des rendements comme dans les modèles habituels.
En résumé,la particularité réside dans le fait qu'ici,le modèle de croissance endogène est à rendements marginaux et d'échelle croissants par rapport au nombre de biens intermédiaires mais à rendements constants par rapport aux quantités de biens intermédiaires.
Dans les autres modèles,on a des rendements marginaux et d'échelle décroissants par rapport aux quantités utilisées de biens intermédiaires et des rendements d'échelle constants par rapport au nombre de bien intermédiaires.

Mais l'obtention de la propriété de croissance endogène a nécessité de poser qu'à l'équilibre,les quantités de biens intermédiaires étaient identiques entre les monopoleurs du secteur des biens intermédiaires.
Cela ne peut se comprendre que dans la mesure où l'élasticité de la demande de biens intermédiaires adressée à l'entreprise i du secteur des biens intermédiaires est la même que celle adressée à l'entreprise j.
Nous montrons que ceci est le cas au niveau des équations (14) plus en avant.
Cela s'explique par la formulation des fonctions de production que nous avons en (5) et dans lesquelles chaque bien intermédiaire à un poids identique.
Une même élasticité-prix de la demande biens intermédiaires entraîne la pratique d'un prix de monopole identique[18] pour tout bien intermédiaire considéré.
Ceci s'explique par le fait qu'aussi bien les fonctions de production que le coût de production sont identiques entre toutes les entreprises du secteur des biens intermédiaires comme le montrent respectivement les équations (5) et les technologies linéaires que nous retrouvons dans les équations (6) dont les formes sont communes à toutes les entreprises.

[18] Pour information,la pratique par les monopoles d'une tarification identique lorsque l'élasticité-prix de la demande est identique pour tous les biens est également vraie même si le monopole considéré n'est un monopole privé.
En effet,on sait qu'un monopole public offrant plusieurs biens,soucieux de maximiser le surplus collectif et astreint à une contrainte d'équilibre budgétaire devra pratiquer des prix de Ramsey-Boiteux identiques entre les biens dès l'instant où leurs élasticités-prix sont les mêmes et qui sont fonctions décroissantes de ces élasticités.
Donc les monopoles considérés ici ne sont pas forcément des privés.

Puisqu'il en est ainsi,nous pouvons dire que plus les firmes utiliseront les nouveaux biens intermédiaires dans des proportions identiques et plus l'effet sur la croissance du secteur des biens finals sera conséquent ce qui entraîne à son tour la même conséquence sur l'output global.
En revanche,plus les firmes du secteur final procèdent à des substitutions factorielles suite à l'apparition des nouveaux biens intermédiaires et moins l'effet est conséquent.
Cette deuxième éventualité est cependant plus proche des modèles de progrès technique d'amélioration de la qualité des produits qu'il serait intéressant d'envisager en extension de ce travail.
Contrairement aux modèles de progrès technique de variétés comme le présent modèle,les modèles d'amélioration de la qualité des produits supposent que n et m sont fixes.
L'augmentation de la qualité des n et m biens intermédiaires existants suppose un processus plus régulier de perfectionnement de ces biens tandis que les inventions que l'on retrouve dans le modèle de progrès technique de variétés correspondent plutôt à des inventions radicales portant sur des biens ou des méthodes de production ou encore consistant en l'introduction de biens ou de services nouveaux et qui sont utilisateurs d'un facteur de production donné.

3 Le modèle de base : Le comportement des agents

3.1 La consommation

Dans le temps,l'agent représentatif souhaite s'installer sur un sentier optimal de consommation.Il devrait donc se conformer au programme suivant:

$$\begin{cases} Max\ U(0) = \int_{\grave{a}}^{\infty} \exp^{-\rho t} \dfrac{C_t^{1-\theta}}{1-\theta}\, dt \\ \textit{sous la contrainte budgétaire instantanée} \\ \dot{K} = wL + w_S S + rK + \Pi - C_t \\ \textit{la contrainte initiale} \\ K(0) > 0, \textit{donné} \\ \textit{et la contrainte terminale (transversalité)} \\ \lim_{t \to \infty} \left[K(t) \exp^{\left(-\int_0^t r(\upsilon)\right) d\upsilon} \right] = 0 \end{cases}$$

où $r(\upsilon)$ est le taux d'intérêt à la date υ .
La condition de transversalité,au-delà de son utilité pour la résolution précise du programme,est là pour indiquer,qu'au terme de l'horizon de planification,le stock de capital détenu par les agents est nul.
Sa valeur peut augmenter dans le temps mais pas sa valeur actualisée.
Signalons que cette contrainte de transversalité s'écrit de façon équivalente:

$\lim_{t \to \infty} x(t) K(t) = 0$ où $x(t)$ représente le prix implicite du capital à la date t.
Dit autrement,la valeur du stock de capital doit tendre asymptotiquement vers 0: l'agent finit ses jours sans laisser d'héritage (positif ou négatif).
Si le stock de capital demeurait asymptotiquement positif alors le prix implicite du capital devra tendre vers 0 à un taux plus rapide que le produit $\mu(t)K(t)$ ne tend vers 0.
Pour résoudre ce programme,posons le Hamiltonien courant suivant (en supprimant l'indice temporel pour gagner en commodité):

$$H(C,K,x,t) = [U(C) + x(wL + w_S S + rK + \Pi - C)]$$

Les conditions de premier ordre donnent:

i) $U'(C) = x$

ii) $\dot{x} = \rho x - r x = x(\rho - r) \Rightarrow \frac{\dot{x}}{x} = (\rho - x)$

En différentiant i) par rapport au temps on a :

$$\dot{x} = U''(C)\dot{C} \Rightarrow \frac{\dot{x}}{x} = \frac{U''(C)\dot{C}}{U'(C)}$$

En multipliant le membre de droite de la dernière expression par $\frac{C}{C}$,on ne modifie rien mais obtient l'expression suivante:

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{CU''(C)}{U'(C)} \times \frac{\dot{C}}{C} = -\frac{1}{\theta}\frac{\dot{C}}{C}$$

En combinant avec i), nous obtenons la relation d'Euler ou de Keynes-Ramsey :

(9) $$g_C = \frac{\dot{C}}{C} = \theta(r - \rho)$$

Cette condition implique que la consommation est optimale lorsqu'elle s'accumule à un taux égal à la différence entre la productivité marginale (nette si nous prenions en compte un terme de dépréciation) et le taux d'escompte (ou préférence pour la présent).Ce sentier optimal de consommation est d'autant plus sensible à cette différence que l'élasticité de substitution intertemporelle de la consommation est grande.L'utilité de la CRRA apparaît alors ici comme indispensable à l'obtention d'une croissance régulière.

Pour arriver en tout point du temps à se situer à l'optimum de consommation,les agents doivent résoudre le Lagrangien suivant:

(10) $$L(Y_{HTIC-K}, Y_{TIC-L}, \lambda) = U(C) + \lambda(Y - p_{HTIC-K}Y_{HTIC-K} - p_{TIC-L}Y_{TIC-L})$$

En remplaçant Y par sa valeur dans (3) puis en faisant le rapport des dérivées du Lagrangien par rapport d'abord à Y_{HTIC-K} puis par rapport à Y_{TIC-L},nous obtenons le prix relatif des biens intermédiaires intensifs en capital comme:

(11) $$p = \frac{p_{HTIC-K}}{p_{TIC-L}} = \frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{Y_{HTIC-K}}{Y_{TIC-L}}\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}}$$

Afin de déterminer le niveau des prix des biens intermédiaires intensifs en capital et en travail,le bien final Y est supposé être le numéraire (son prix est alors:1)
En tenant compte de (11), l'équation (3) peut-être exprimée comme fonction des seuls prix de ces biens et des paramètres:

$$\left[\gamma\ p_{TIC-L}^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)p_{HTIC-K}^{1-\varepsilon}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} = 1$$

Puis en divisant à gauche et à droite l'expression ci-dessus par p_{HTIC-K} *et* p_{TIC-L} respectivement,il vient:

(12) $$p_{HTIC-K} = \left[\gamma\ p^{\varepsilon-1} + (1-\lambda)\right]^{\frac{1}{\varepsilon-1}} \quad et \quad p_{TIC-L} = \left[\gamma + (1-\gamma)p^{1-\varepsilon}\right]^{\frac{1}{\varepsilon-1}}$$

3.2 La production de biens finals et des biens intermédiaires

Nous prendrons l'exemple des firmes se trouvant dans le secteur des TIC ou secteur des biens intensifs en travail et aurons des résultats analogues pour le secteur HTIC ou secteur des biens intensifs en capital.

Secteur de la production de biens finals

Pour le secteur de la production du biens finals,il y a concurrence parfaite à la fois sur le marché de l'output (on vient de voir que par son comportement maximisateur,l'agent détermine le niveau des quantités optimales à un prix relatif que les firmes appartenant à ce secteur prennent pour donné) et sur le marché de l'input[19].
A l'image de l'agent-représentatif consommateur qui cherche à maximiser son utilité,le producteur du secteur final cherche à maximiser son profit.
Si dans la relation agent-consommateur et producteur final,la détermination des prix des biens finals se fait "en dehors" de chaque agent (aucun pris isolément n'est décisif pour influer sur le niveau du prix d'équilibre) par définition du commissaire-priseur,la maximisation du profit du secteur final dans le cadre de la relation secteur final-secteur intermédiaire donne lieu à une détermination endogène des prix des biens intermédiaires à laquelle le secteur final ne fait cependant que "participer"[20] en

[19] Bien que le secteur des biens intermédiaires soit en position de monopole.La concurrence parfaite qu'on évoque est vue sous l'angle du secteur final:les firmes de ce secteur sont en compétition pure de tout monopole.
[20] Même si le "dernier mot" revient au monopole qui pourra le rationner quelle que soit sa demande et d'autant plus que celle-ci est importante pour un prix donné.
A noter que c'est le secteur final entier qui "participe" et pas une firme du secteur, ce qui corrobore ci-dessus.

soumettant au secteur intermédiaire la fonction demande de biens intermédiaires qui résulte de la maximisation de son programme:

$$\begin{cases} Max / yticl(i) \\ p_{TIC-L}Y_{TIC-L} - wL - \int_0^n zticl(i)yticl(i) \\ ou\ avec\ (5) \\ p_{TIC-L}(\int_0^n yticl(i)^{\beta})^{\frac{1}{\beta}} - wL - \int_0^n zticl(i)yticl(i) \end{cases}$$

où $zticl(i)$ est le prix du bien intermédiaire i fixé par le monopole du secteur des TIC.
Etant en concurrence parfaite sur son marché, l'entrepreneur du secteur final prend comme donnés,le prix de sa production,celui des biens intermédiaires ainsi que la frontière supérieure de l'activité d'innovation traduite par la borne supérieure des intégrales.
La résolution donne:

(13) $$\frac{zticl(i)}{p_{TIC-L}} = \left(\frac{yticl(i)}{Y_{TIC-L}}\right)^{\frac{-1}{\upsilon}} \Rightarrow yticl(i)^* = Y_{TIC-L}\left(\frac{zticl(i)}{p_{TIC-L}}\right)^{-\upsilon}$$

Par analogie,la fonction de demande de biens intermédiaires intensifs en capital est:

(13) $$yhtick(i)^* = Y_{HTIC-K}\left(\frac{zhtick(i)}{p_{HTIC-K}}\right)^{-\upsilon}$$

Pour une élasticité de substitution donnée, la quantité de biens intermédiaires demandée par le secteur final au secteur intermédiaire augmente avec sa production et le prix du bien final et diminue lorsque le prix des biens intermédiaires augmente.

Secteur de la production de bien intermédiaires

Le programme du monopoleur qui s'est acquitté du prix du brevet acheté au secteur de la recherche consiste à choisir la quantité $yticl(i)$ à produire de façon à maximiser sont profit.
Soulignons au passage que contrairement à Romer [1990], le coût variable n'est pas en termes de bien final mais est constitué du seul facteur travail.
En effet chez Romer, l'hypothèse consistait à dire qu'une fraction du bien final permettait la production d'une unité de bien intermédiaire.
Ceci dit nous pouvons écrire le programme d'optimisation dans ce secteur comme:

$$\begin{cases} Max / yticl(i) \\ zticl(i)(yticl(i) - CT(yticl(i)) \\ avec\ CT(yticl(i))\ le\ coût\ total\ associé\ à\ la\ production\ yticl(i) \end{cases}$$

La résolution donne :

$$z'ticl(i)(yticl(i)) \times yticl(i) + zticl(i)(yticl(i)) - w = 0$$

$$zticl(i)(yticl(i))\left(1 + \frac{z'ticl(i)(yticl(i)) \times yticl(i)}{zticl(i)(yticl(i))}\right) = w$$

or l'élasticité-prix de la demande du bien intermédiaire est par définition :

$$\upsilon_i = -\frac{dyticl(i)/yticl(i)}{dzticl(i)/zticl(i)} = -\frac{dyticl(i)}{dzticl(i) \times yl(i)}\frac{zticl(i) \times yticl(i)}{yticl(i)} = -\frac{zticl(i) \times yticl(i)}{dzticl(i)(yticl(i)) \times yticl(i)}$$

$$puisque\ yticl(i) = 1$$

Cependant, travaillant avec des CES identiques pour toutes les firmes du secteur final (cf équations (6)) on a $\upsilon_i = \upsilon\ \forall\ i$.

En remplaçant la valeur de υ dans l'avant dernière expression,nous avons:

$$zticl(i) = \left(1 - \frac{1}{\upsilon}\right)^{-1} w$$

Ensuite, sachant que $\upsilon = \dfrac{1}{1-\beta}$ on a :

(14) $zticl(i) = \dfrac{w}{\beta}$ et par analogie: $zhtick(i) = \dfrac{r}{\beta}$

avec $\dfrac{1}{\beta}$,la marge appliquée sur le coût marginal de production qui est w ou r s'agissant du secteur hors tic.

Aussi bien dans le secteur des biens intermédiaires tic intensifs en travail que dans la secteur des biens intermédiaires hors tic intensifs en capital,le prix de ces biens à l'intérieur de chaque secteur est identique tel que le montrent les équations (14).
Cela implique que chaque firme de ce secteur produira la même quantité du bien intermédiaire dans lequel elle est monopole et réalisera par conséquent le même profit que les autres monopoles.
L'intuition d'un tel résultat vient de ce que dans la formulation de la fonction de production du secteur final (cf équations (5)), tous les biens intermédiaires sont utilisés et entrent dans cette fonction avec un poids identique lié lui-même à leurs coûts de production identiques (cf équations (6).

On retrouve ce résultat habituel dans le cadre des modèles de progrès technique avec différenciation horizontale qui contiennent l'idée de goût pour la variété qui veut dire que l'agent préfère utiliser beaucoup de peu de biens que peu de beaucoup de biens.

Le monopoleur dans notre cas est porté par ce goût de variété émanant des consommateurs dont la demande inclut tous types de biens et ce par recherche donc de variété.

Puisque les quantités écoulées dans chaque secteur et pour chaque i sont les mêmes on a : $yticl(i) = yticl \text{ et } yk(i) = yhtick$ et compte tenu des équations (6) et (7) on a:

(15) $$yticl(i) = ticl(i) = \frac{L}{n} \quad et \quad yhtick(i) = htick(i) = \frac{K}{m}$$

Pour obtenir l'offre globale de biens finals intensifs en travail et en capital,on substitue d'abord les équations (15) dans les équations (5) puis en intégrant:

(16) $$Y_{TIC-L} = \left[\int_0^n \left(\frac{L}{n}\right)^{\beta} di\right]^{\frac{1}{\beta}} \Rightarrow Y_{TIC-L} = \frac{L}{n}\left[\int_0^n di\right]^{\frac{1}{\beta}} \Rightarrow Y_{TIC-L} = Ln^{\frac{1-\beta}{\beta}}$$

et par analogie: $Y_{HTIC-K} = Km^{\frac{1-\beta}{\beta}}$

Cette écriture des équations (5) facilite d'avantage l'interprétation du progrès technique: A population active donnée,une augmentation de n c'est-à-dire du nombre de biens intermédiaires du secteur tic entraîne une augmentation de la production finale de biens intensifs en tic ou encore une augmentation de la productivité du travail. Idem du point de vue du secteur hors tic intensif en capital.
On retrouve une des explications proposées (cf section: secteur de la production de bien final) à savoir que l'ampleur des augmentations de productivité en présence de progrès technique dépend du niveau de la substitution opérée par les firmes du secteur des biens intermédiaires.

Nous savons que l'élasticité de substitution est $\upsilon = \frac{1}{1-\beta}$ est d'autant plus grande que le paramètre β est grand.
Dans ce cas l'incitation à la substitution serait évidemment grande également.
Le résultat est alors que plus β serait petit et plus l'effet du progrès technique sur la productivité serait amélioré.Ce résultat se déduit aisément des équations (16).
On voit également un effet d'échelle que Jones [1995] a critiqué dans le cadre des Etats-Unis où la population active avait augmenté sans conséquence proportionnelle sur les innovations.Ce constat sera à l'origine des modèles de croissance semi-endogène qui affectent un exposant à $n \text{ et } m$,exposant qui selon Jones serait non pas supérieur mais inférieur à l'unité traduisant l'impossibilité de croissance à long terme sans augmentation de la population active.

Pour terminer cette section sur les secteurs finals et intermédiaires,nous pouvons écrire les expressions des salaires et du taux de l'intérêt à l'équilibre.
Pour cela substituons les équations (14),(15) et (16) dans (13):

(17) $$w = \beta\, n^{\frac{1-\beta}{\beta}} p_{TIC-L} \qquad et \qquad r = \beta\, m^{\frac{1-\beta}{\beta}} p_{HTIC-K}$$

Nous pouvons réécrire (11) en cherchant à y faire apparaître les progrès techniques sur le travail et sur le capital.
Pour cela utilisons (16) pour obtenir l'expression du prix relatif des biens finals intensifs en capital comme:

(18) $$p = \frac{p_{HTIC-K}}{p_{TIC-L}} = \frac{1-\gamma}{\gamma}\left[\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1-\beta}{\beta}}\frac{K}{L}\right]^{-\frac{1}{\varepsilon}}$$

L'élasticité de substitution ε joue un rôle déterminant dans l'évolution de ce prix relatif.Pour un nombre relatif de biens hors tic donné,le prix relatif des biens TIC est d'autant plus faible que l'élasticité de substitution est importante.
L'augmentation de m relativement à n a pour effet de réduire le prix relatif des biens Hors TIC d'autant plus fortement que l'élasticité de substitution est faible.

3.3 La recherche

Un dernier enchaînement dans ce modèle va du secteur des biens intermédiaires au secteur de la recherche.
L'achat d'un brevet de durée infinie[21] coûte au secteur intermédiaire un prix donné.
La firme du secteur des biens intermédiaires n'accepte de payer ce prix que dans la mesure où la somme actualisée des revenus nets anticipés dans son activité de production couvre au moins ce prix.
Moyennant l'hypothèse de concurrence parfaite dans le secteur de la recherche (parfaite aussi dans le secteur de la production du bien final et imparfaite dans celui de la production du bien intermédiaire pour rappel) on a donc dissipation totale de profit pur dans ce secteur.
Etant donné qu'également le marché des brevets est concurrentiel,il y a par conséquent dissipation totale de la rente des monopoleurs du secteur intermédiaire.
Ni le secteur de la recherche ni celui des biens intermédiaires ou finals ne font de profit à long terme.
Ceci implique que les ménages actionnaires dans ces secteurs ne réalisent non plus pas de profits et cela se traduit par la nullité du terme Π au niveau de l'équation (2).
Le stock de connaissances que matérialisent $n \text{ et } m$ apparaît aussi bien ici que chez Romer [1990],comme un bien public quasi-exclusif puisque dans le secteur de la recherche les externalités (intrasectorielles[22]) ne sont pas protégées ou internalisées tandis que l'acquisition d'un brevet protège la connaissance comme input dans la production des biens intermédiaires.
Quant aux externalités intersectorielles,elles sont pour le moment supposées nulles.
La valeur du brevet pour le secteur dont la recherche aboutit à l'invention d'un nouveau bien intermédiaire,par exemple dans le secteur intensif en travail est:

[21] Bien que commode cette durée de vie infinie empêche d'envisager tout processus de création destructrice tel que le décrit Schumpeter.
[22] Les externalités intersectorielles sont pour le moment supposées inexistantes.
Nous revenons plus en avant sur la pertinence d'une telle hypothèse en cherchant à étudier les conséquences de son relâchement sur l'équilibre de l'économie..

(19) $$V_{ticl}(t) = \int_t^{\infty} \exp^{-\int_t^S ((r(\omega) + \delta)dw)} \pi_{ticl}(s)ds$$

où $\pi_{ticl}(s)$ est le profit instantané c'est-à-dire à la date s du monopoleur i du secteur tic et r le taux d'intérêt qui est supposé variable sur les intervalles (s-t) d'où l'utilisation de l'intégrale sur cet intervalle avec ω dans le rôle de la variable muette (et pas t).
La valeur dans le secteur hors tic a la même forme et est égale à celle du secteur tic.Cette affirmation est propre au présent modèle et ne se retrouve ni chez Romer ni chez Grossman-Helpman [1991] dans leur modèle d'augmentation de la variété des biens de consommation.
Mais comme ces derniers modèles,le fait de supposer des techniques de production de bien intermédiaires identiques dans les deux secteurs et des fonctions de productions finales identiques dans les deux secteurs en y adjoignant une entrée symétrique des biens intermédiaires dans ces fonctions des secteurs finals permet de retrouver les mêmes résultats à condition toutefois que $n = m$ et aussi que w = r.

Tout se passe comme si nous traitions d'un seul secteur mais utilisant dans toutes les fonctions sectorielles deux sortes d'inputs en nombre $(n + m)$ à une date donnée.
Pour trouver la valeur de l'équation (19),il nous faut calculer le profit maximisé de monopole dans le secteur des biens intermédiaires:
Nous reprenons le programme d'optimisation (cf sous-section "secteur des biens intermédiaires) mais le résolvons en utilisant l'information[23] apportée par les équations (14) et (15) :

$$\begin{cases} Max / yticl(i) \\ zticl(i)(yticl(i) - CT(yticl(i)) \\ avec\ CT(yticl(i))\ le\ coût\ total\ associé\ à\ la\ production\ yticl(i) \end{cases}$$

(20) $$\pi_{ticl} \max = \frac{w}{\beta}\frac{L}{n} - w\frac{L}{n} = \frac{wL - wL\beta}{n\beta} = \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)\frac{wL}{n}$$

et $\pi_{htick} \max = \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)\frac{rK}{m}$

Nous retrouvons compte tenu des équations (5) et (6) - qui traduisent une fois de plus respectivement d'abord la même élasticité-prix de la demande de biens intermédiaires par le secteur final conséquence elle-même de ce que ces biens intermédiaires entrent symétriquement (poids identiques) dans les fonctions (5) et ensuite le fait que tous les biens intermédiaires soient produits de même façon ((6)) - sont identiques pour toutes les entreprises.
Même si ce dernier point est quand même intérieur au premier puisque dans le programme de maximisation de la production du secteur des intermédiaires d'où nous avions trouvé le prix de monopole,les coûts linéaires (6) étaient bien évidemment considérés.

[23] L'indice "i"n'a plus de raison d'être du moment qu'à l'équilibre prix et quantité de monopole sont identiques.

Il est possible d'approcher la nullité des profits dans le secteur de la recherche invoquant non seulement l'hypothèse de concurrence pure et parfaite sur le marché du produit des nouveaux biens intermédiaires mais aussi la mobilité intersectorielle des "scientifiques" parfaite aussi.
Comme le montrent les équations (8), cette mobilité rendue possible par le caractère concurrentiel sur le marché du produit du secteur de la recherche notamment à long terme avec l'hypothèse d'entrée sortie des firmes,incite ces travailleurs à se faire employer là où leur contribution marginale à la valeur de l'invention (19) est la plus grande.Nous aurons par conséquent:

(21) $$w_S = \max\{b_{ticl} n V_{ticl}, b_{htick} m V_{htick}\}$$

Cette affirmation exige à son tour que les rendements des scientifiques soient constants ce qui n'est pas incompatible avec *"le standing on the shoulder of giant"* mais prête le flanc à la critique dans la simple mesure où les gains de productivité dans les secteurs innovateurs ne sont pas les seuls à expliquer la variation du produit mais sont associés à une forte composante PGF (productivité globale des facteurs).
Cependant,ici la forme des FPI des secteurs innovateurs ne laisse point de place à ce genre d'analyse.
Notons que la formulation (21) indique que la salaire perçu par les scientifiques sera non seulement plus élevé là où leur contribution à la valeur sera la plus grande mais ce salaire sera aussi égal à l'équilibre à chacune des valeurs (hypothèse de concurrence pure et parfaite dans la recherche).Il ne faut donc pas perdre de vue que seuls deux niveaux de salaires existeront dans l'économie à l'équilibre,l'un dans la recherche intensive en travail et l'autre dans la recherche intensive en capital.
Or comme nous l'avons déjà fait remarquer les salaires ne doivent pas être différents parceque la mobilité des "scientifiques" exclura dans ce cas l'occurrence d'invention dans le secteur à contribution à la valeur plus faible.

Le comportement des différents agents de cette économie,pour mener à l'équilibre doit pouvoir l'installer sur un sentier où les prix des facteurs que sont w, w_S *et* r satisfont aux équations (17) et (21),où la tarification des biens intermédiaires se passe conformément à (14) donnant par conséquent un niveau agrégé de biens finals intensifs en travail et en capital comme dans (16) ainsi qu'une consommation évoluant selon la règle de Keynes-Ramsey elle-même respectant la condition de transversalité.

C'est en ayant à l'esprit ces interactions et l'ordre avec lequel s'opèrent leurs enchaînements qu'il va falloir, après avoir rappelé la définition de la notion de croissance équilibrée caractériser celle-ci.

4 Caractérisation de la dynamique d'équilibre de l'économie

4.1 Définition de la notion de croissance équilibrée

Lorsque la croissance de toutes les variables en niveau se fait à taux constant (ce taux pouvant être nul),on dit qu'elle est régulière ou stationnaire (semi-stationnaire lorsque le taux est nul).

S'il se trouve qu'en plus,ce taux constant est identique pour toutes les variables considérées,on dit alors qu'elle est équilibrée.
Dans l'optique d'une croissance équilibrée,il est requis que le produit global ainsi que la consommation et le stock de capital croissent au même taux constant g.
L'équation (9) en supposant une préférence pour le présent stable impliquera que le taux de l'intérêt soit constant.
Cette constance implique à son tour que le prix relatif des biens finals intensifs en capital soit constant, ce que l'on démontre à présent.

4.2 La nécessaire stationnarité du prix relatif des biens intensifs en capital et son impact sur la décision d'orientation du progrès technique dans la recherche

On va démontrer par l'absurde que la nécessité de maintenir constant le taux de l'intérêt exige l'absence de progrès technique en direction des biens et services du secteur hors tic et la présence du seul progrès technique en direction des biens et services du secteur TIC.

L'intuition

Mais avant cela,en voici l'intuition lorsque les biens intermédiaires sont complémentaires:
Partons d'une situation d'équilibre entre contributions factorielles à l'output:
Lorsque les biens intermédiaires intensifs en capital deviennent par exemple relativement plus importants que les biens intermédiaires intensifs en travail,cela signifie que le prix relatif des biens intermédiaires intensifs en capital est plus bas que son inverse.
Dit plus précisément,c'est le coût relatif des biens intermédiaires intensifs en capital qui devient plus faible traduisant une meilleure productivité relative des biens intermédiaires intensifs en capital.
En effet,dans ce modèle le point important est qu'un nouveau bien intermédiaire voit le jour conditionnellement à l'existence d'un profit qui lui est associé.
Lorsque l'économie considérée dispose d'une dotation n de biens intermédiaires intensifs en travail,le profit associé à un nouveau bien est proportionnel à sont coût en travail $\left(\frac{wL}{n}\right)$ comme l'indique l'équation (20).
On peut voir que le progrès technique,à travers l'augmentation de n est de nature à réduire le coût du bien.
[En réalité,cet effet positif sur le profit provient autant de la forme des équations (8) -qui traduisent l'impact positif de la recherche passée sur la recherche actuelle -que de la formulation des équations (5)].
En conséquence,la part du facteur capital devient alors moins importante qu'à l'équilibre initial et le facteur travail pèse davantage.
Cela détermine le sens du progrès technique qui sera biaisé en faveur du facteur travail (Latc).Il en résulte,en cas de recherche couronnée de succès,une augmentation du nombre relatif de biens intermédiaires intensifs en travail,ce qui joue vers une stabilisation des contributions factorielles.

Dès lors que l'on considère les formes des équations (5), (6) et (7),on peut dégager deux sources d'augmentation de la production de biens intensifs en capital :

l'accumulation de capital (l'investissement) et le progrès technique en direction du capital mais une seule source de progrès technique en direction des biens intensifs en travail.
Comme l'accumulation du capital est inhérente à tout processus économique qu'il soit en régime transitionnel,d'équilibre,stationnaire (sauf semi-stationnaire),on a en croissance équilibrée le capital qui croîtrait au même taux constant que l'output et la consommation.
L'accumulation du capital qui tend à augmenter les quantités produites de chaque bien intermédiaire intensif en capital provoquerait la diminution du coût relatif de ces biens.Or de l'éqution d'Euler (9),ce coût représenté par le taux d'intérêt,devrait rester constant pour que la consommation évolue à taux constant.
S'il n'y avait pas de progrès technique en direction du facteur travail,le taux de l'intérêt baisserait (ou plus exactement devrait baisser pour assurer l'équilibre en valeur du capital (rK) ce qui cesserait d'être en adéquation avec la croissance équilibrée.
Pour que baisse il n'y ait pas,du progrès technique en direction du facteur travail va avoir lieu car la baisse du taux de l'intérêt conformément au raisonnement sur les parts factorielles ci-dessus,implique un poids relatif du facteur travail gagnant en importance.
C'est donc l'existence d'accumulation du capital le long du sentier d'équilibre qui se substituera au Catc et qui avec du Latc maintiennent le taux de l'intérêt dans une constance requise par le régime de croissance équilibrée.
C'est l'existence du phénomène d'accumulation du capital et l'absence d'accumulation du facteur travail qui font que seul du progrès technique portant sur le facteur travail sera compatible en régime de croissance équilibrée.

La démonstration

L'idée précédente,à savoir que la source de production de biens intensifs en capital est double alors que celle qui est en direction du travail est unique est au centre de cette démonstration.
L'accumulation du capital est repérable grâce au ratio suivant:
$k = \frac{MK}{NL}$ le rapport des biens finals intensifs en capital (biens du secteur Hors TIC) aux biens finals intensifs en travail (biens du secteur TIC) ou encore rapport du capital efficace au travail efficace.
Ce ratio matérialisant donc l'accumulation contient aussi et $N = n^{\frac{1-\beta}{\beta}}$ qui chacune illustre respectivement le progrès technique sur les biens intermédiaires intensifs en capital et en travail.Ceci se voit aisément à partir des équations (16) et particulièrement en prenant la dérivée logarithmique du ratio k,on retrouve clairement le progrès technique lié à la pure accumulation de capital et celle liée au progrès technique portant sur les biens intermédiaires intensifs en capital (Catc).Nous allons du reste en avoir besoin lors de la démonstration de l'inexistence de Catc en régime de croissance équilibrée dans le cas où ε <1.
Afin que la consommation croisse à un taux constant g,il est requis que le taux de l'intérêt,tel qu'obtenu dans (17) soit également constant.
On a donc d'après (17): $r = \beta M p_{HTIC-K}$ ce qui en différentiant par rapport au temps donne:

$$\frac{\dot{M}}{M} = -\frac{\dot{p}_{HTIC-K}}{p_{HTIC-K}} \qquad \text{(I)}$$

Cette relation (I) est la version en termes absolus[24] de la relation en termes relatifs entre le progrès technique en direction du capital et le prix du capital trouvée par GHK[25] dans son modèle de croissance avec progrès technique incorporé au capital. Les augmentations de $M \text{ ou } N$ sont équivalentes à du progrès technique en direction des biens intermédiaires intensifs en capital ou en travail respectivement.

Supposons $\frac{\dot{M}}{M} > 0$ puis en utilisant l'expression de k ci-dessus,l'équation (18) se réécrit: $p = \frac{p_{HTIC-K}}{p_{TIC-L}} = \frac{1-\gamma}{\gamma} k^{-\frac{1}{\varepsilon}}$ qu'on introduit dans (12) puis différentions l'expression obtenue par rapport à k après l'avoir passée en logarithme pour avoir:

$$\frac{\dot{p}_{HTIC-K}}{p_{HTIC-K}} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\gamma\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)^{\varepsilon-1} k^{-\frac{(\varepsilon-1)}{\varepsilon}}}{\gamma\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)^{\varepsilon-1} k^{-\frac{(\varepsilon-1)}{\varepsilon}} + (1-\gamma)} \frac{\dot{k}}{k} < 0 \qquad \text{(II)}$$

L'expression ci-dessus est négative (rappelons que $\varepsilon \in [0,\infty[$) or par hypothèse il avait était posé l'existence de progrès technique en direction des biens intermédiaires intensifs en capital,ce qui a l'effet d'augmenter k au fur et à mesure que le prix des biens finals intensifs en capital diminue. k tend donc vers l'infini.
Compte tenu de la présence du paramètre[26] ε ,deux cas vont se poser en plus de ce cas général où l'on sait que l'élasticité de substitution étant de toues manières positive la relation (II) tient en tout point du temps.
Mais qu'en est-il en dynamique ? La relation (I) tient-elle à long terme ? On y répond en utilisant donc les deux cas à l'aide de la relation (II)

Cas $\varepsilon > 1$

L'existence d'accumulation du capital et de progrès technique en direction du capital (Catc),comme souligné ci-dessus entraîne une augmentation du ratio k .Etant donné que l'élasticité est supérieure à 1,les biens intermédiaires intensifs en capital qui ont augmenté relativement aux biens intensifs en travail deviennent relativement moins coûteux que ces derniers et vont progressivement être substitués aux biens finals intensifs en travail,ce qui fait tendre le ratio k vers l'infini et donc le prix du capital vers 0 donc le prix relatif des biens finals intensifs en capital vers 0.
Cette analyse s'obtient en observant dans la relation (II) que lorsque l'élasticité est supérieure à 1,il y a d'abord le fait que $\frac{\dot{k}}{k}$ augmente.

---

[24] Mais qui se ramène très directement à une forme relative en utilisant l'équation (18)
[25] *Greenwood.J,Hercovitz.Z et Krussel.P [1997] "Long-run Implications of Investment-specific Technological Change" American Economic Review,* vol 87,n°3 p 342-362.
[26] Nous ne sommes évidemment dans aucun des 3 cas extrêmes suivants: Une parfaite substituabilité matérialisée par une élasticité unitaire donc une Cobb-Douglas;une élasticité infinie donc une fonction de production linéaire;une élasticité nulle donc une Léontieff.

Cette augmentation comme déjà affirmé fait tendre k vers l'infini dès lors qu'elle se poursuit en présence de la baisse du prix du capital.Elle n'est pas donc bornée.

Simultanément, $k^{-\frac{(\varepsilon-1)}{\varepsilon}}$ tend vers 0 à un rythme plus rapide au numérateur de la relation (II) puisque γ est positif.

Au total le prix des biens intensifs en capital tend donc vers 0 d'après la relation (II).

La relation (I) ne tient plus dans le régime équilibré puisque $\frac{\dot{M}}{M} > 0$ et $\frac{\dot{p}_{HTIC-K}}{p_{HTIC-K}} = 0$

Cas $\varepsilon < 1$

Toujours en partant de la relation (II),la différence avec le cas précédent tient à ce que maintenant : $k^{-\frac{(\varepsilon-1)}{\varepsilon}}$ tend vers l'infini ce qui rend le terme du milieu de l'expression (II) sans impact sur la valeur limite du prix du capital qui dépend des deux autres termes.En effet:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\gamma\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)^{\varepsilon-1} k^{-\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}}{\gamma\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)^{\varepsilon-1} k^{-\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1-\gamma)} = 1$$

(penser par exemple à $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x} = 1$) ce qui

implique que:

$$\frac{\dot{p}_{HTIC-K}}{p_{HTIC-K}} \to -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\dot{k}}{k} < 0$$

puis en se servant de la dérivée logarithmique du ratio k on a :

Contrairement au cas précédent on ne peut à ce stade voir de contradiction puisque la relation (I) semble tenir mais:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} + \frac{\dot{M}}{M} - \frac{\dot{N}}{N}$$

et sachant qu'en régime de croissance équilibrée on a :

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{C}}{C} = \frac{\dot{K}}{K} = g$$

et en tenant compte de la relation (I) et de la valeur limite,il vient:

$$\frac{\dot{M}}{M} = \frac{1}{\varepsilon}\left(g + \frac{\dot{M}}{M} - \frac{\dot{N}}{N}\right) = \frac{1}{\varepsilon-1}\left(g - \frac{\dot{N}}{N}\right)$$

Par conséquent lorsque l'élasticité de substitution est inférieure à l'unité, $\frac{\dot{M}}{M}$ ne peut être positif que si le taux de progrès technique en direction du facteur travail (Latc) est supérieur aux taux de croissance g du régime d'équilibre.

A ce stade non plus,la nécessaire absence du progrès technique en direction du capital ne peut être établie.

Remplaçons les équations (16) dans l'équation du produit global de l'économie (16):

$$Y = \left[\gamma\,(NL)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1-\gamma)(MK)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} = A^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$$

Passant en logarithmes puis dérivant par rapport on a:

$$\ln Y = \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\ln A \Rightarrow \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)$$

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\left[\frac{\gamma\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\right)(NL)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}-1}\left(\dot{N}L + N\dot{L}\right) + (1-\gamma)\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\right)(MK)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}-1}\left(\dot{M}K + M\dot{K}\right)}{A}\right]$$

Si nous remarquons qu'on peut de façon équivalente diviser les deux termes de la somme qui se trouve au numérateur de l'expression ci-dessus et sachant que par hypothèse $\dot{L} = 0$,on a au final:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\gamma\left(\frac{\dot{N}}{N}\right)(NL)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1-\gamma)\left(\frac{\dot{K}}{K} + \frac{\dot{M}}{M}\right)(MK)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}}{\gamma\,(NL)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1-\gamma)(MK)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}}$$

On peut facilement observer que si $\frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{N}}{N} = g \; et \; \frac{\dot{M}}{M} = 0 \; alors \; \frac{\dot{Y}}{Y} = g.$

Cela correspondrait bien à une croissance équilibrée dont on voit qu'elle n'est pas compatible avec du Catc mais seulement du Latc.
Nous avions fait remarquer à une étape antérieure que l'existence Latc autorisait l'existence de Catc mais qu'alors le taux de Latc devait être supérieur au taux de croissance g de l'économie.

C'est ainsi que va apparaître l'absurdité de l'hypothèse de Catc dans ce cas.

En effet si nous avons $\frac{\dot{N}}{N} > g$ et donc avec l'hypothèse de départ $\frac{\dot{M}}{M}$ >0 le taux de croissance de l'économie (cf formule) serait plus grand que g.
Ceci montre alors l'inexistence de croissance équilibrée puisque les autres variables [consommation,capital,salaires (pour les salaires,cf équation 17 sachant que n croît au taux[27] $\frac{g\beta}{1-\beta}$ (ou N croît au taux g,ce qui revient au même) afin de maintenir p constant dans l'équation 18] croissaient au taux g.

[27] Pour démontrer ce taux du nombre de variétés de biens intermédiaires intensifs en travail, prenons le logarithme de (16): $\ln Y_{TIC-L} = \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)\ln n + \ln L$ d'où nous dérivons par rapport au temps pour obtenir en

L'inexistence de croissance équilibrée est bien due à l'impossibilité de progrès technique en direction du capital qui comme expliqué dans "l'intuition" contribue à doubler les sources de progrès en direction du capital.

4.3 La détermination de la condition de non-arbitrage sur les biais de progrès technique en régime de croissance équilibrée

Cherchons maintenant la valeur d'un brevet ou valeur de l'invention d'un nouveau bien intensif en travail ou en capital en effectuant les intégrales[28] telles que données dans les équations (19).

Par rapport aux façons usuelles d'intégrer,au-delà de la prise en compte d'un élément d'obsolescence des technologies jouant comme le taux de l'intérêt négativement sur la valeur de l'invention,il faut pour être cohérent remarquer que la croissance du stock de capital,générateur de progrès technique en direction des biens intensifs en capital a un impact par conséquent positif dans l'évaluation de la valeur de l'invention. Rappelons que cette valeur d'invention est la somme actualisée des profits nets et qu'une augmentation du nombre de biens intermédiaires - générée par l'accumulation dont on parle – utilisés par le secteur final et produits par le secteur intermédiaires augmente les profits dans le secteur intensifs en capital et doit donc se retrouver influer positivement sur la valeur d'invention.

Par analogie,la croissance de n produit les mêmes effets sur les secteurs intensifs en travail et devrait par conséquent se retrouver influer positivement sur la valeur d'invention.

Cependant comme le montre l'équation (17) les salaires qui augmentent au taux g ont une influence négative sur les profits,ce qui doit se retrouver influencer négativement la valeur d'invention.

Notons que la hausse des salaires intervient d'une part en raison du progrès technique en direction du facteur travail et d'autre part d'un effet *"capital deepening"* lié à l'accumulation du capital.

L'intégrale à calculer est alors en utilisant la formule (cf note n°20) :

$$V_{ticl}(t) = \int_t^{\infty} \exp^{-\int_t^S \left(\left(r(\omega) + \delta + g - \frac{g\beta}{1-\beta} \right) dw \right)} \pi_{ticl}(s) ds$$

$$\dot{V}_{ticl}(t) = r \int_t^{\infty} \exp^{-\int_T^S \left(r(\omega) + \delta + g - \frac{g\beta}{1-\beta} \right) d\omega} \pi_{ticl}(s) ds - \exp^{-0} \pi_{ticl}(s)$$

$$\dot{V}_{ticl}(t) = rV_{ticl}(t) - \pi_{ticl}(t)$$

---

régime de croissance équilibrée: $g = \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \frac{\dot{n}}{n} \Leftrightarrow \frac{\dot{n}}{n} = \frac{g\beta}{1-\beta}$.

[28] La valeur de V pour une firme f donnée peut également s'obtenir en appliquant la formule de la dérivée V' suivante, appropriée pour les intégrales de la forme (19) dans l'équation d'arbitrage de Bellman : rV-V' = π - δV

$$\frac{\partial F(x,u)}{\partial x} = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial F(x,u)}{\partial x} du + b'(x) F(x, b(x)) - a'(x) F(x, a(x))$$

Ce qui est la condition de non-arbitrage exprimant l'idée que le rendement d'un investissement dans la recherche doit être égal au taux d'intérêt pour être entrepris.

Le rendement dans la recherche étant composé de la plus-value en capital $\left(\frac{\dot{V}_{ticl}(t)}{V_{ticl}(t)}\right)$ et du taux de profit $\left(\frac{\pi_{ticl}(t)}{V_{ticl}(t)}\right)$.

(22) $$V_{ticl} = \frac{1-\beta}{\beta}\frac{wL/n}{r+\delta-(1-2\beta)g/(1-\beta)}$$

et par analogie pour le secteur intensif en capital on a:

(22) $$V_{htick} = \frac{1-\beta}{\beta}\frac{rK/m}{r+\delta-g}$$

En combinant (21) avec (22) on peut écrire que:

$$w_S = \max\left\{\frac{1-\beta}{\beta}b_l\frac{wL}{r+\delta-(1-2\beta)g/(1-2\beta)},\frac{1-\beta}{\beta}b_k\frac{rK}{r+\delta-g}\right\}$$

Etant donné que nous venons de voir qu'en croissance équilibrée,il n' y a pas de progrès technique en direction des biens intermédiaires intensifs en capital,nous pouvons en nous servant de (8) trouver le nombre de "scientifiques" juste nécessaire et qui est:

$$S_{htick} = \frac{\delta}{b_{tick}}$$

Si le nombre dépasse alors il y a progrès technique en direction du capital.
Le nombre ne doit cependant pas être inférieur en raison de l'obsolescence des techniques.
Le nombre de "scientifiques" restant ira dans le secteur des biens intermédiaires intensifs en travail.
Comme déjà dit,le taux de croissance du nombre de biens intermédiaires intensifs en travail est tel que :

$$\frac{\dot{n}}{n} = \frac{g\beta}{(1-\beta)} \Rightarrow g = \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)\frac{\dot{n}}{n}$$

Ce qui,remplacé dans l'équation (8) concernée nous permet d'écrire que :

$g = \frac{1-\beta}{\beta}\left(b_l(S-S_{htick})-\delta\right)$ et en remplaçant S_{htick} par $\frac{\delta}{b_{htick}}$,on obtient:

(23) $$g = \frac{1-\beta}{\beta}\left(b_l S - \frac{\left(b_{ticl} + b_{htick}\right)}{b_{htick}}\delta \right)$$

Afin d'éviter la décroissance économique,une condition sur S doit être respectée:

$$S \geq \frac{\beta}{1-\beta}\frac{\left(b_{ticl} + b_{htick}\right)}{b_{htick}b_{ticl}}\delta$$

Comme cela est indiqué dans l'équation d'Euler pour la consommation,celle-ci qui doit évoluer au rythme g en croissance équilibrée réagit d'autant plus à l'écart entre le taux de l'intérêt et le taux de préférence pour le présent que l'élasticité de substitution est grande.
Ainsi, puisque le taux de préférence (qui incite à consommer aujourd'hui) est donné, le taux de l'intérêt (qui incite à consommer demain) devra être plus élevé lorsque g est élevé afin de convaincre (il y a une meilleure rémunération de l'épargne en cas de taux élevé) les agents de différer leur consommation permettre de maintenir la croissance.
L'élasticité de substitution inter temporelle de la consommation indiquera l'ampleur de l'ajustement du taux de l'intérêt.

Dans l'optique du calcul de la part relative du capital $\left(\frac{rK}{wL}\right)$ l'équation (17) en utilisant dans cet ordre le fait que $k = \frac{MK}{NL}$,l'équation (12) puis (18) et puis (11) et (16) peut-être encore écrite comme:

(25) $$r = R(M,k) = \beta\ M\left[\gamma\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)^{\varepsilon-1} k^{-\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\right)} + (1-\gamma)\right]^{\frac{1}{\varepsilon-1}}$$

Etant donné que l'on se situe en régime de croissance équilibrée,le taux d'intérêt étant alors une constante,il y a une relation implicite entre $k\ et\ M$ dans la relation (25)
Cette relation entre ces deux variables qui a la particularité de satisfaire la condition de croissance équilibrée est telle que:

$k = F(M)$ de (25), $F' > 0\ \forall\ \varepsilon \in [0,\infty[$

Nous rappelons à présent la définition de la part relative du capital:

$$\sigma_K = \frac{rK}{wL}$$

Nous cherchons à l'exprimer en fonction de l'intensité capitalistique k :

A ce but, effectuons le rapport des équations (17):

$$\frac{r}{w} = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1-\beta}{\beta}} \left(\underbrace{\frac{p_{HTIC-K}}{p_{TIC-L}}}_{p} \right) \Rightarrow \sigma_K = p \left(\underbrace{\left(\frac{K}{L}\right)\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1-\beta}{\beta}}}_{k} \right) \Rightarrow \sigma_k = pk$$

Et en remplaçant le prix relatif des biens intensifs en capital par sa valeur en (18):

(26) $$\sigma_k = \left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right) k^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}$$

(26) dépend de l'intensité capitalistique mais également de l'élasticité de substitution entre les deux catégories de biens finals.

Définissons une "intensité capitalistique d'indifférence" telle que si l'économie en question dispose de cette intensité,les firmes de la recherche deviennent indifférentes entre Latc et Catc:
Nous y reviendrons plus longuement,mais pouvons dire que ce moment d'indifférence survient lorsque la contribution marginale maximale des"scientifiques" à la valeur de l'invention d'un nouveau bien intermédiaire intensif en travail devient égale à cette valeur dans le secteur intensif en capital,ce qui se matérialise par:

$$b_{ticl} n V_{ticl} = b_{htick} m V_{htick}$$

ce qui par application aux équations (22) donne:

$$wLb_{ticl}(r + \delta - g) = rKb_{htick}\left(r + \delta - (1-2\beta)\frac{g}{(1-\beta)} \right)$$

Comme $\sigma_k = \frac{rK}{wL} = b$ en situation de non-arbitrage,nous isolons ce rapport de l'égalité ci-dessus dans un premier temps et dans un second,comme nous sommes en régime d'équilibre nous remplaçons tout r (excepté bien entendu celui qu'on a dans σ_k) par sa valeur compatible avec l'équilibre indiqué par l'équation (9) soit : $r_{eq} = \rho + \theta g$ et on a la condition de non-arbitrage entre biais de progrès technique:

(27) $$\sigma_k = \frac{b_{ticl}(1-\beta)(\rho + \delta + (\theta - 1)g)}{b_{htick}((1-\beta)(\rho + \delta) + ((1-\beta)(\theta - 1) + \beta)g)} = b$$

En combinant avec l'équation (26) nous réécrivons l'intensité capitalistique associée:

(28) $$k^* = \left(\frac{b\gamma}{1-\gamma}\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$$

En reprenant la relation $k = F(M)$ et sachant qu'au niveau de non arbitrage,la part relative de capital et l'intensité capitalistique sont données par (27) et (28),on devrait

avoir un niveau de technologies intensives en capital associé ou frontière technologique associée M^*.
Ce niveau[29] doit également comme cela fut démontré, rester constant en croissance équilibrée.
Il est cependant utile de garder à l'esprit que l'existence de dépréciation des techniques implique que pour maintenir M à son niveau M^* il faille réaliser du progrès technique en direction des biens intermédiaires intensifs en capital.
En l'absence d'un progrès technique de cette nature impliquerait : $\frac{\dot{M}}{M} < 0$ dont il a été démontré l'incompatibilité avec une croissance équilibrée.
Dit autrement les firmes de la recherche ne délaisseront[30] aucun secteur.
Pour que cela se fasse il est nécessaire que $b_{ticl} n V_{ticl} = b_{htixk} m V_{htick}$ or cette condition est celle de non-arbitrage qui vient d'être illustrée.
En conséquence la condition de non-arbitrage est une condition nécessaire et suffisante à la croissance équilibrée.
Les valeurs trouvées en (27),(28) ainsi que celles issues de la relation implicite en régime équilibré entre l'intensité capitalistique et la frontière technologique sont opérationnelles pour l'étude du sentier équilibré.
Avec ces valeurs,il est possible de montrer non seulement que le sentier d'équilibre exhibe du progrès technique en direction du secteur des produits tic mais que ce sentier est unique lorsque δ >0.

4.4 Croissance équilibrée en présence de dépréciation des techniques

Nous indiquions que la condition de non-arbitrage était nécessaire à la croissance équilibrée or ceci implique que la part relative du capital soit constante (ce qui ne signifie bien évidemment pas que la part du capital reste constante).
Pour maintenir constante cette part factorielle 4 choses doivent être considérées:
La dite dépréciation des techniques,l'accumulation du capital,le Catc et le Latc.
Le raisonnement est le suivant:

Nous sommes sur le sentier de croissance équilibrée.
La part relative du capital doit rester constante.Cela implique que l'incitation des firmes à faire de la recherche devrait être la même entre les deux secteurs. Cependant la dépréciation des techniques modifie à la baisse le niveau M^* de la frontière technologique compatible avec le sentier équilibré.
Il est donc nécessaire que se réalise du Catc mais de nature à juste compenser l'effet négatif de la dépréciation sur la frontière technologique.
En raison des rendements marginaux décroissants dans la recherche et de l'effet *spillovers* de la recherche passée,l'abaissement de la frontière technologique améliore les perspectives de profits[31] des firmes dans le secteur intensif en

[29] Remarquons que si nous n'étions pas en régime équilibré,la valeur de M ne serait ni la même (puisque le taux d'intérêt ne serait pas le même),ni obligatoirement constante.

[30] Mais il s'agit uniquement d'un progrès technique compensatoire dont l'issue consiste à maintenir l'économie sur la frontière technologique compatible avec le régime de croissance équilibrée.

[31] Dans une version plus récente de la modélisation ,sans doute plus proche de l'intuition,la productivité marginale des chercheurs est une fonction décroissante du nombre de chercheurs.
Il est souhaitable de ne pas confondre cet effet avec l'effet d'échelle *"standing on the Shoulders of Giants"*.
En croissance équilibrée,l'absence de Catc signifie qu'aucun 'scientifique n'opère dans le secteur.

capital.Elles investissent donc dans la recherche du Catc compensatoire, investissement qui cesse dès que nous retrouvons de nouveau la condition de non-arbitrage:

$$b_{ticl} n V_{ticl} = b_{htick} m V_{htick}$$

L'accumulation du capital au taux g est quant à elle contrebalancée par le progrès technique en direction du facteur travail.
C'est au total ce qu'il se passe le long de l'unique sentier équilibré et en récapitulant:

Un progrès technique exclusivement harrodien au taux g,du progrès technique solowien de compensation dont l'ampleur est déterminée par le taux de dépréciation des techniques,des salaires croissants au taux g,une accumulation de capital au taux g,un taux d'intérêt d'équilibre donné par l'équation d'Euler et tel que $r_{eq} = \rho + \theta g$ et une consommation croissant au taux g également.

4.5 Croissance équilibrée sans dépréciation des techniques

Il a été montré que seul du progrès technique portant sur les biens intermédiaires intensifs en travail était compatible avec le régime équilibré.
La condition de non-arbitrage n'a plus besoin d'être vérifiée puisqu'il n'y a plus nécessité de faire de la recherche dans les deux secteurs étant donné justement l'absence de dépréciation.
La condition est simplement qu'il n'y ait pas du tout de progrès technique dans le secteur intensif en capital.
A cette fin il est simplement requis que l'investissement dans le secteur intensif en travail soit strictement supérieur à l'investissement dans le secteur intensif en capital.
Ce qui est équivalent à ce que :

Pour réaliser du progrès technique juste compensatoire,il est intuitif qu'il faille avoir besoin de moins de "scientifiques" que ce qui est requis pour faire du progrès technique net.
Puisqu'on reste en-dessous de la frontière technologique,les *spillovers* de la recherche passée ont déjà produit leurs effets et jouent positivement dans les perspectives de profits par le truchement de la productivité décroissante des chercheurs.Nous supposons donc qu'implicitement les effets positifs des *spillovers* dans le secteur de la recherche,une fois acquises ne se perdent pas,ni se déprécient.
Si cette formalisation des *spillovers* est critiquable,,nous pourrions affirmer qu'il serait sans doute également plus pertinent de se placer non pas dans un cadre de croissance endogène mais semi-endogène comme l'illustre l'équation de Jones.C.I *"R&D Based Models of Economic Growth" Journal of Political Economy p 758-784* [1995] où la productivité des innovations qui apparaît,décroîtrait ainsi:

$\frac{innov_t}{tech_{t-1}} = \alpha \frac{IRD_t^{\rho}}{SE_t}$ où $innov_t$ est le nombre d'innovation en t , $SE_t = (tech_{t-1})^{\beta}$, β >0 un indice rendant compte de la difficulté dans la recherche et IRD_t l'investissement en volume dans la recherche et ρ un paramètre indiquant la possibilité ou non d'appropriation ou de copiage de la recherche.
On peut se référer à une autre version de croissance semi-endogène formulée dans *"Endogenous Growth and Environmental Regulation: The Case of the Kyoto Protocol"* Fougeyrollas.A,Le Mouël.P et Zagamé.P Document de travail ERASME-Ecole Centrale de Paris [2001] sans duplication dans la recherche mais avec *spillovers*-intersectoriels (inexistants,à ce stade,dans le présent modèle).
Dans ces deux dernières versions on pourrait dire que l'abaissement de la frontière technique améliore les perspectives de profits puisque l'effet d'échelle est décroissant traduisant qu'on est de plus en plus sur des épaules de "nains" dans la recherche.

$b_{ticl} n V_{ticl} > b_{htick} m V_{htick}$

L'inégalité ci-dessus pouvant être vérifiée par divers niveaux de la frontière technologique $M \geq M^* = F^{-1}(k^*)$ on conclut à l'existence de multiples sentiers de croissances équilibrées et comme le niveau existant de biens intermédiaires capital et travail est différent pour chacun d'entre eux,la part relative du capital en régime équilibré sera aussi différente.

5 Croissance équilibrée et théorie du progrès technique induit par les prix: Mise en évidence d'une cessation d'application sur le fil du rasoir

La notion de progrès technique induit par les prix est connue depuis Hicks [1932][32] (voir citation supra) et c'est avec les modèles de croissance endogène avec progrès technique induit par les prix notamment Kamien & Schwartz [1961][33] puis Kennedy [1964][34] qu'on sait formaliser les comportements microéconomiques de biais de progrès technique économisant un facteur davantage qu'un autre.

Nous allons démontrer que dans ce modèle,lorsque le régime de croissance équilibrée prévaut,qu'il y ait ou non dépréciation des techniques et à condition que les biens finals intensifs en capital et ceux intensifs en travail soit complémentaires (élasticité de substitution inférieure à 1 sinon la substitution factorielle se "substitue" au mécanisme de progrès technique) la théorie du progrès technique cesse de s'appliquer.

Sur un sentier de croissance équilibré,nous avions vu que la condition de non-artirage était $\sigma_k = b$ (cf équation (27).Cette condition survient au moment précis où la contribution marginale des "scientifiques" à l'invention d'un nouveau bien intermédiaire devient la même que l'on soit dans le secteur intensif en travail ou dans le secteur intensif en capital.
Essayons de traduire formellement cette condition de non-arbitrage.Il y a non-arbitrage entre biais de progrès technique lorsque les firmes[35] observent un ratio:

(a) $$\left(\frac{\dfrac{Coût\ du\ capital(rK)}{Valeur\ de\ l'invention\ dans\ le\ \sec teur\ hors\ tic(Val_{htic})}}{\dfrac{coût\ du\ travail\ (wL)}{Valeur\ de\ l'invention\ dans\ le\ \sec teur\ tic(Val_{tic})}} \right) = 1 \Rightarrow \sigma_k = b$$

ce qui peut se réécrire[36]:

32 *"The Theory of Wages" Macmillan,London*
33 *"Induced Factor Augmenting Technical Progress from a Microeconomic View Point"*
34 *"Induced Prices in Innovation and the Theory of Distribution"*
35 Compte tenu des relations qu'entretiennent les firmes du secteur final,celles du secteur intermédiaire et la recherche,le terme "firme" est représentatif de la réaction de l'ensemble des firmes des trois secteurs.
Même si ce sont bien entendu les firmes de la recherche qui vont décider des biais de progrès.
En conséquence tout se passe comme si ces dernières décidaient pour les autres de façon bienveillante pour leurs économies (main invisible ?) sachant les caractéristiques de l'économie (demande inverse,niveau du coût relatif du capital,profits des secteurs intermédiaires etc… (idée de Cournot-Nash)
36 Il faut noter l'importance de l'ordre des implications dans les relations (a) (et donc (A))

(A) $\frac{rK}{Val_{htic}} = \frac{wL}{Val_{tic}} \Rightarrow \sigma_k = b$

Selon la théorie du progrès technique induit par les prix,les biais de progrès dépendant seulement du rapport $\frac{rK}{wL}$.

Or notre re formulation de la part relative du capital montre que les firmes ne se préoccupent pas seulement de ce rapport dans leur décision d'orienter le progrès technique en direction d'un secteur ou d'un autre.

Pour le voir,supposons par exemple que $wL < rK$.
Le progrès technique induit par un coût du capital plus élevé que celui du travail devrait inciter les firmes à faire du Catc.
Mais si au même moment $Val_{htic} > Val_{tic}$ alors la relation (A) tiendrait.
Partant toujours de notre exemple,il se pourrait également que tout en ayant $Val_{htic} > Val_{tic}$,la relation (A) ne tienne pas.

Pour que la relation (A) soit vérifiée,il est par conséquent nécessaire que l'écart entre niveau plus élevé du coût du capital et le niveau plus bas du coût du travail soit compensé par une valeur plus importante du bien intermédiaire du secteur hors-tic.
Cette condition redondante (car contenue implicitement dans la condition de non-arbitrage) montre qu'en régime de croissance équilibrée,la théorie du progrès technique induit par les prix cesse d'être opérationnelle.

Pour le voir,observons la relation (a):

On y voit que plusieurs coûts relatifs du capital satisfont la condition de non-arbitrage $\sigma_k = b$ tant que la relation (A) est vérifiée.
Or la relation (A) comme nous le montrons dans la condition redondante ci-dessus est vérifiée pour une infinité de ratios b et *a fortiori* pour un b ≠ 1,ce qui montre que sur le sentier de croissance équilibrée,la théorie du progrès technique induit par les prix n'est plus opérationnelle.
Cette conclusion reste naturellement vraie que l'on prenne ou non en compte l'existence de dépréciation des techniques.
Dans le cas où il n'y aurait prise en compte des dépréciations, chacun des multiples sentiers d'équilibre possibles devrait vérifier cette conclusion.

En dehors du régime équilibré,la théorie redevient opérationnelle,puisque la condition de non-arbitrage ne vaut plus (le terme de gauche de la relation (a) n'est plus égal à 1).En ce cas si elle est supérieure à 1,la part relative du secteur hors-tic sera supérieure à 1 et on fera du progrès technique en direction des biens de ce secteur et inversement si elle est inférieure à 1.

6 Stabilité autour de l'état stationnaire: La dynamique transitionnelle

La question consiste à savoir si l'équilibre en présence de dépréciation des techniques ou les équilibres sans dépréciation sont stables.
Il n'est cependant pas utile d'étudier la stabilité en présence de dépréciation puisqu'on a souligné à son propos qu'elle se concevait simplement comme une multitude de sentiers équilibrés en présence de dépréciation.
La question consiste donc à savoir ce qu'il advient lorsque l'on se trouve avec une part relative de capital $\sigma_b \neq b$; Y retourne-t-on ?
La recherche de réponse est donc menée en supposant $\delta > 0 \ \ et \ \ \varepsilon < 0$.

6.1 Mise en évidence d'une discontinuité d'allocation des chercheurs

Nous rappelons qu'au total,voici ce qu'il se passe le long de l'unique sentier équilibré: Un progrès technique exclusivement harrodien au taux g,du progrès technique solowien de compensation dont l'ampleur est déterminée par le taux de dépréciation des techniques,des salaires croissants au taux g,une accumulation de capital au taux g,un taux d'intérêt d'équilibre donné par l'équation d'Euler et tel que $r_{eq} = \rho + \theta g$ et une consommation croissant au taux g également.
Afin de représenter comment le fonctionnement du modèle mène à l'obtention de ces caractéristiques il est possible d'utiliser les équations de deux variables d'état $M \ et \ k$ (intensité capitalistique) et d'une variable de contrôle $c = \dfrac{C}{K}$.
Cette écriture de l'équation de consommation permet de stationnariser la consommation, comme cela est le cas pour les deux autres variables lorsqu'on se trouve en régime de croissance équilibrée au taux g.
En prenant la dérivée logarithmique de l'intensité capitalistique,nous pouvons écrire:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} + \frac{\dot{M}}{M} - \frac{\dot{N}}{N}$$

or en économie fermée,le produit sous l'optique dépense s'écrit:

$Y = C + I = C + \dot{K}$ et en divisant par K on peut écrire de manière équivalente :

$\dfrac{\dot{K}}{K} = \dfrac{Y - C}{K}$ et en remplaçant Y par sa valeur donnée dans (3) et en y apportant le changement d'écriture du fait des équations (16) on peut écrire le premier terme de la dérivée de l'intensité capitalistique comme:

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{\left[\gamma\,(NL)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1-\gamma)(MK)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} - C}{K}$$

En combinant les dérivées logarithmiques de $M = m^{\frac{1-\beta}{\beta}} \ et \ N = n^{\frac{1-\beta}{\beta}}$ avec les équations (8) il est possible d'exprimer les deux autres termes comme :

$$\frac{\dot{M}}{M}-\frac{\dot{N}}{N}=\frac{1-\beta}{\beta}\left(b_{htick}S_{htick}-b_{ticl}S_{ticl}\right)=\frac{1-\beta}{\beta}\left(b_{ticl}S-\left(b_{ticl}+b_{htick}\right)S_{htick}\right)$$ puisque

$$S=S_{ticl}+S_{htick}$$

Finalement:

(29) $$\frac{\dot{k}}{k}=M\left[\gamma\, k^{-\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}+\left(1-\gamma\right)\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}-c-\left[\frac{1-\beta}{\beta}\left(b_{ticl}S-\left(b_{ticl}+b_{htick}\right)S_{htick}\right)\right]$$

Dans le même esprit, écrivons la dérivée logarithmique de c :

$$\frac{\dot{c}}{c}=\frac{\dot{C}}{C}-\frac{\dot{K}}{K}$$

Remplaçons la dynamique de la consommation par l'équation (9) dans laquelle on remplace le taux d'intérêt par sa valeur d'équilibre donnée par l'équation (25):

$$\frac{\dot{C}}{C}=\theta\left[M\beta\left(\gamma\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)^{\varepsilon-1}k^{-\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}+\left(1-\gamma\right)\right)-\rho\right]^{\frac{1}{\varepsilon-1}}$$

et en tenant compte de la dynamique du stock de capital obtenue précédemment :

(30) $$\frac{\dot{c}}{c}=\theta\left[M\beta\left(\gamma\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)^{\varepsilon-1}k^{-\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}+\left(1-\gamma\right)\right)-\rho\right]^{\frac{1}{\varepsilon-1}}-M\left[\gamma\, k^{-\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}+\left(1-\gamma\right)\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}+c$$

Enfin,la troisième équation qui est source de discontinuité est d'obtention plus directe puisqu'il suffit d'utiliser l'équation (8) et le fait que $M=m^{\frac{1-\beta}{\beta}}$,ce qui aboutit à:

(31) $$\frac{\dot{M}}{M}=\frac{1-\beta}{\beta}\left(b_{htick}S_{htick}-\delta\right)$$

Ce système de trois équations différentielles qui permet d'analyser la dynamique transitionnelle du modèle montre l'apparition d'une quatrième variable en l'occurrence le nombre de chercheurs S_{htick}.
En conséquence,ce système comporte 4 variables qui sont :
k,c,M et S_{htick}.On est face à un problème de sous détermination qu'on cherche à lever en trouvant une relation entre le nombre de chercheurs affectés au secteur hors tic et k.
De cette relation,il ressortira que le comportement des chercheurs trouve son pendant dans celui de l'intensité capitalistique.

6.2 Répartition inter-sectorielle des chercheurs en dehors du régime d'équilibre

La question à laquelle il faut maintenant chercher à répondre consiste à savoir comment les chercheurs se répartissent entre les deux secteurs lorsque l'équilibre est rompu.

Nous proposons avant de commencer à répondre à cela de revenir sur l'explication de la relation entre σ_k *et* k en fonction de l'élasticité de substitution ε soit la relation (26).

En réponse à une augmentation de k ,σ_k diminue lorsque ε < 1.
En effet lorsque k augmente le nombre de biens du secteur hors tic augmente relativement au nombre de biens du secteur tic.
Cela a pour conséquence de réduire le coût relatif de la production de biens du secteur hors-tic en raison d'une meilleure productivité de ces biens.
Cependant comme l'élasticité entre ces biens et ceux du secteur tic est inférieure à l'unité,les biens sont plutôt complémentaires.
Comme la productivité des biens intensifs en capital (biens du secteur hors-tic) a augmenté,il est possible d'utiliser moins de biens intermédiaires pour une même production qu'avant.
Cela n'est pas le cas dans l'autre secteur qui doit utiliser autant de biens intermédiaires pour une même production qu'avant.
Par conséquent le rapport des coûts unitaires de production et donc σ_k diminue.

Les équations (15) montrent que si substitution il pouvait y avoir,m pourrait remplacer n (et inversement si nous avions supposé que k avait baissé) et comme les biens du secteur hors-tic sont devenus plus productifs,on peut les substituer dans la production des biens intermédiaires intensifs en travail.
Par conséquent,tout se passe comme si le coût relatif du capital dans la production des deux types de biens intermédiaires avait augmenté.
C'est pourquoi lorsque l'élasticité de substitution entre les deux biens des deux secteurs est supérieure à l'unité, σ_k augmente lorsque k .

Partons donc d'une rupture dans le régime de croissance équilibrée.
Supposons que cette rupture est telle que: $\sigma_k > b$ et cherchons si celle-ci peut être compatible avec le fait que :

$$b_{ticl} n V_{ticl} > b_{htick} m V_{htick}$$

Nous prenons le cas de biens complémentaires.
S'il en était ainsi,tous les chercheurs iraient travailler dans le secteur des biens hors-tic puisque leur contribution marginale y est plus grande.
D'après l'équation (8),cela impliquerait que $\frac{\dot{m}}{m} < 0$ et en tenant compte de la relation implicite (déduite à partir de (25) pour rappel) $k(t) = F(M(t))$ on peut dire que $\dot{k}(t) < 0$ et considérant la discussion précédente sur la relation entre k et σ_k ,on peut affirmer que dans le cas où l'élasticité de substitution entre les biens est inférieure à

l'unité, $\dot{\sigma}_k(t) > 0$ ce qui[37], tant que $b_{ticl} n V_{ticl} > b_{htick} m V_{htick}$ ferait tendre le coût relatif du capital vers l'infini et donc $\frac{\dot{M}(t)}{M(t)}$ et $\frac{\dot{k}(t)}{k(t)}$ vers 0.

Ce résultat est jusqu'ici envisageable même s'il ne ramène pas le système vers le régime équilibré. Cette divergence n'est cependant pas la question que nous nous sommes posée.Ce qui est recherché ici, consiste à savoir si :

$\sigma_k > b$, $b_{ticl} n V_{ticl} > b_{htick} m V_{htick}$ et ε <1 peuvent se concevoir en même temps.

Introduisons à cette fin,le ratio en transition suivant mais qui ne tient *a priori* pas compte de la nature de la rupture c'est-à-dire si elle est du type:
$\sigma_k > b$, $b_{ticl} n V_{ticl} > b_{htick} m V_{htick}$ ou d'un autre:

$$\Delta(t) = \frac{m(t) V_{htick}(t)}{n(t) V_{ticl}(t)}$$

.

Ce ratio mesure,en régime de transition, l'évolution dans le temps du rapport de la valeur globale relative des m biens intermédiaires intensifs en capital par rapport à la valeur globale des n biens intermédiaires intensifs en travail.
En appliquant ce ratio aux intégrales (19) - à la remarque près que comme n'étant plus en régime de croissance équilibrée toutes les variables (mais pas les paramètres supposés donnés) peuvent varier – on a:

$$\Delta(t) = \int_t^{\infty} \frac{\exp\left[-\int_t^s (r(\omega) + \delta) d\omega\right] r(s) K(s)}{\exp\left[-\int_t^s (r(\omega + \delta) d\omega)\right] w(s) L(s)} ds = \int_t^{\infty} \frac{r(s) K(s)}{w(s) L(s)} ds = \int_t^{\infty} \sigma_k(s) ds = \int_t^{\infty} \left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right) k(s)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} ds$$

On peut voir que $\lim_{t \to \infty} \Delta(t) = \int_t^{\infty} \lim_{s \to \infty} \left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right) k(s)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} ds = \int_t^{\infty} ds = \infty$ lorsque $\varepsilon < 1$

Il en ressort que $k(t)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \to 0$ lorsque $k(t) \to \infty$ et $S_{htick} = S$

Cette limite indique que dans l'hypothèse où les biens seraient complémentaires lorsque k tend vers l'infini,la valeur globale des m biens intermédiaires intensifs en capital augmente infiniment. Il faudrait la comparer au résultat de la discussion précédente dont il était ressorti que : $\lim_{t \to \infty} k(t) = 0$

Dit autrement,en introduisant le nouveau ratio,on voit que $\lim_{t \to \infty} k(t) = 0$ correspond à

[37] On devrait en principe chercher à réduire la part croissante du facteur capital mais étant donné la meilleure rentabilité que nous avons imposée par hypothèse dans le secteur des produits tic,le secteur de la recherche hors tic ne produit rien faute de chercheurs.En effet ceux-ci ont donc par hypothèse une contribution marginale plus grande dans la recherche de produits tic.

$\lim_{t \to \infty} k(t)^{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}} = 0$ mais si c'est le cas,on a alors: $\lim_{t \to \infty} \Delta(t) = \infty$.

Ce qui contredit la discussion précédente et montre l'impossibilité de concevoir à la fois:

$\sigma_k > b$ et $b_{ticl} n V_{ticl} > b_{htick} m V_{htick}$.

En voici une tentative d'intuition économique:

On sait qu'au niveau de la condition d'arbitrage:

$\sigma_K = b, k = k^* \; et \; b_{ticl} n V_{ticl} = b_{htick} m V_{htick}$

Lorsque $\sigma_k > b$,cela implique que $k < k^*$ ce qui en se remémorant la formule de k signifie qu'il y a dans l'économie,relativement moins de biens du secteur hors tic.
Cela a comme conséquence que le coût relatif du capital soit supérieur à ce qu'il était au niveau de la condition de non-arbitrage.A ce niveau,il y a dans le modèle une plus grande incitation à faire du progrès technique en direction des biens du secteur hors tic.
Or l'hypothèse $b_{ticl} n V_{ticl} > b_{htick} m V_{htick}$ indique que la valeur d'invention d'un nouveau bien du secteur tic est plus élevée au moment même où le coût relatif du capital est plus élevé.Il apparaît ainsi une "limite dynamique"[38] au progrès technique induit.
L'arbitrage entre la valeur de l'invention et le coût relatif s'étant porté sur la première ce qui paraît mieux fondé dans la mesure où la valeur d'invention incorpore naturellement les coûts de production.
Cependant,il est difficile de concevoir que pour le secteur des biens intermédiaires -qui détermine la valeur des brevets par actualisation des profits retirés de l'invention-la valeur d'invention d'un bien intermédiaire intensif dans un facteur dont le coût relatif est le plus élevé,puisse être moins grande que la valeur d'invention d'un autre bien intermédiaire.
La valeur d'invention d'un bien intermédiaire donné ne peut donc être supérieure à celle d'un autre bien intermédiaire lorsque le premier est intensif dans un facteur dont le coût relatif de production est plus élevé.
Lorsqu'il y a n biens tic dans l'économie,le profit du monopole du secteur intermédiaire dont les ventes au secteur final détermine le coût du brevet est réduit de $\frac{wL}{n}$.On voit bien que cette réduction est d'autant plus grande (et le profit élevé que n est petit).
L'intérêt de faire du progrès technique sur le bien le moins abondant dans l'économie est donc manifeste.

[38] La nature statique de la limite à la théorie du progrès technique induit contient l'idée que la part relative du capital peut avoir n'importe quelle valeur lorsque l'on pose préalablement que $b_{ticl} n V_{ticl} = b_{htick} m V_{htick}$.
Ici il ne s'agit en réalité pas d'une limite à la théorie du progrès technique induit mais simplement du constat que lorsque par exemple,la part relative du capital est plus grande que celle du facteur travail,l'incitation à réaliser du progrès technique est également plus grande dans le secteur des biens intermédiaires intensifs en capital.
Dans le présent modèle où les biens intermédiaires nouveaux sont introduits en raison de leur impact sur le profit du secteur final -et donc des secteurs intermédiaires et de la recherche-celui-ci ne saurait être plus faible lorsque l'un des facteurs coûte au départ relativement plus que l'autre.

Pour réconcilier davantage ce cas de figure avec la théorie du progrès technique induit,on pourrait faire appel à la critique de Jones,en relâchant l'hypothèse de rendements croissants des biens intermédiaires dans le secteur de la recherche,ce qui peut s'appréhender par l'existence d'une frontière technologique au fur et à mesure de laquelle on s'approche difficilement.
Le progrès technique devient de plus en plus coûteux au fur et à mesure de son accélération.
L'intérêt de faire du progrès technique sur le bien le moins abondant dans l'économie s'en trouve davantage renforcé.
Par conséquent,lorsque le nombre m de biens intermédiaires du secteur hors-tic est inférieur au nombre n de biens intermédiaires du secteur tic,il est plus rentable car plus facile d'augmenter m que n.
Mais ce recours supposerait qu'on puisse modifier les paramètres b_{ticl} *et* b_{htick} en fonction du nombre de biens existants,ce qui n'est pas le cas dans la formulation de départ du modèle.Même si un tel amendement semble plausible.

En conclusion,une rupture de type $\sigma_k > b$ ne peut avoir lieu que dans le cas où:

$$b_{ticl} n V_{ticl} \leq b_{htick} m V_{htick}$$

Par conséquent et en se rappelant,le sens de la relation (25) soit $k = F(M)$ ainsi que l'équation (26),on peut affirmer que lorsqu'à une date t on a, $\sigma_k(t) > b$,cela implique que $k(t) < k^*$,ce qui,tenant compte de la relation $k = F(M)$ implique à son tour que $M(t) < M^*$ et donc $S_{htick}(t) < S^*_{htick}$.
Ces implications sont antérieures - nous les connaissions déjà - à la conclusion sur la rupture donnée ci-dessus mais elles montrent bien qu'il existe une relation entre S_{htick} *et* k :

$$S_{htick}(t) = \overset{+}{s}(k(t))$$

Cette relation est importante pour lever la discontinuité du système composé des équations (29),(30) et (31) en raison de cette dernière qui était la seule à ne pas dépendre de k .
Il faut maintenant voir comment évolue cette relation lorsque l'on tient compte de la conclusion apportée en régime de transition du type $\sigma_k > b$.
On vu que dans une telle configuration et dans le cas où $\varepsilon < 1$,on a :

$$b_{ticl} n V_{ticl} \leq b_{htick} m V_{htick} .$$

En ce cas, $k(t) < k^*$, implique que : $\frac{\dot{M}(t)}{M(t)} > 0 \Rightarrow \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} > 0 \Rightarrow \frac{\dot{S}_{htick}(t)}{S_{htick}(t)} > 0$

Il est alors possible de récapituler par analogie,les 4 cas qui peuvent se produire dans la transition:

Cas 1 $\varepsilon < 1$ et $\sigma_k > b$	**Cas 2** $\varepsilon < 1$ et $\sigma_k < b$	**Cas 3** $\varepsilon > 1$ et $\sigma_k > b$	**Cas 4** $\varepsilon > 1$ et $\sigma_k < b$
$k < k^*$	$k > k^*$	$k > k^*$	$k < k^*$
$M < M^*$	$M > M^*$	$M > M^*$	$M < M^*$
$S_{htick} = S$	$S_{htick} = 0$	$S_{htick} = S$	$S_{htick} = 0$
$S_{ticl} = 0$	$S_{ticl} = S$	$S_{ticl} = 0$	$S_{ticl} = S$

Commentaire:

Le cas 3 indique que lorsque la part relative du capital est supérieure à son niveau correspondant du régime équilibré et que les biens finals sont substituables,le nombre de chercheurs dans le secteur de la recherche de produit tic est nul.
Cela est du à la formulation des productivités marginales des chercheurs telle qu'on la voit dans les équations (8).En effet lorsque la part relative du capital est plus importante qu'à l'équilibre,$b_{htick} m V_{htick} > b_{ticl} n V_{ticl}$,ce qui explique qu'aucun chercheur n'aille dans le secteur des tic.
C'est pourquoi tous les chercheurs s'attèlent au secteur hors tic,ce qui augmente le nombre de biens de ce secteur conformément à l'équation (8).
Le cas 1 se distingue du cas 3 du fait de la complémentarité supposée des biens.
De ce fait,lorsque le déséquilibre est de type $\sigma_k > b$,donc $k < k^*$ cette fois puisque comme déjà expliqué,le fait qu'il y ait davantage de biens du secteur tic améliore la productivité de ces derniers dans leur production que l'on peut voir dans les équations (5) mais la contrainte de complémentarité des biens implique désormais d'associer moins de facteur travail mais autant de facteur capital qu'avant (alors qu'il aurait dû y avoir moins de facteur capital),ce qui est de nature à augmenter la part relative du capital.
C'est pourquoi tous les chercheurs s'attèlent au secteur des produits hors tic.
Ce qui augmente le nombre de biens intermédiaires intensifs en capital conformément à l'équation (8)
Les cas 1 et 3 aboutissent tous les deux à l'augmentation du nombre de produits du secteur hors tic mais l'explication diffère en raison de la nature complémentaire ou substituable respectivement des biens.
Par analogie,les cas 2 et 4 aboutissent tous les deux à l'augmentation du nombre de biens du secteur tic.
Dans les cas 1 et 2 il y a convergence vers l'équilibre $\sigma_k = b$ et divergence dans les cas 3 et 4.
Remarquons enfin que la mobilité discontinue des chercheurs liée aux termes de productivité posés constants est sans doute une hypothèse irréaliste.
Il est cependant possible de rendre continu le déplacement des travailleurs entre les secteurs en supposant que le terme de productivité dans chaque secteur est une fonction croissante mais concave (productivité marginale décroissante) du nombre de chercheurs.
De cette manière,les mouvements de chercheurs d'un secteur vers l'autre augmentent la productivité dans le secteur de départ,ce qui autorise,à partir d'un certain seuil d'arrivée, que la productivité dans le secteur d'arrivée décline et rejoint celle du secteur de départ.

A ce moment,on retrouverait le régime de croissance équilibrée ou la divergence mais à une rythme moins "brutal" que dans le cas de la discontinuité.

6.3 De l'intérêt de la relation entre le nombre de chercheurs et l'intensité capitalistique

Le fait d'avoir mis en évidence une relation entre S_{htick} $et\ k$ lève la difficulté qui se trouvait dans le système d'équations (29),(30) et (31) précisément parcequ'en plus de dépendre de $k,c\ et\ M$ -ce qui aurait été suffisant pour que le système soit parfaitement déterminé-ces trois équations dépendaient également de S_{htick} puisque l'équation (31) en dépendait.

La difficulté étant levée grâce à l'existence d'une relation entre S_{htick} $et\ k$ va permettre donc d'affirmer que le système (29),(30) et (31) décrit correctement la dynamique du modèle.

Comme nous venons de le dire,le système est stable au sens du point-selle et dépend de la valeur de l'élasticité de substitution entre les biens des deux secteurs.

En voici le rappel des mécanismes en jeu dans le cas de la stabilité et de l'instabilité respectivement:

Cas où $\varepsilon < 1$

L'équilibre de croissance équilibré exige que $\sigma_k = b$.

Lorsque l'élasticité de substitution entre les biens est inférieure à 1,la part relative du capital évolue inversement avec k.La théorie du progrès technique induit signifie que lorsque par exemple $\sigma_k > b$,il s'ensuive $b_{htick}mV_{htick} > b_{ticl}nV_{ticl}$ et que donc le progrès technique se fasse en direction du secteur des biens hors tic.

En cas de succès,l'impact est une augmentation de k,ce qui améliore la productivité du facteur capital et autorise d'en combiner moins avec un même volume de facteur travail pour sur une même isoquante.

C'est pourquoi σ_k diminue et converge vers la valeur d'équilibre.

Cas où $\varepsilon > 1$

Lorsque l'élasticité de substitution entre les biens est inférieure à 1,la part relative du capital évolue dans le même sens que k.La substitution factorielle remplace la théorie du progrès technique qui n'a plus de raison d'être.

Lorsque par exemple un déséquilibre de type $\sigma_k > b$ se produit,cela signifiant que $k > k^*$ et donc que la productivité du facteur capital est plus élevé,ce qui milite en faveur d'une substitution du facteur capital au facteur travail.

C'est pourquoi σ_k augmente et diverge de sa valeur d'équilibre.

Cependant,le système composé des trois équations reste soumis à des variations extrêmes de la population de chercheurs selon que $k > k^*$ ou non.

S'il était possible de rendre continues ces variations,l'étude du système en régime transitionnel en serait grandement facilitée dans le sens où il serait mathématiquement et non économiquement résolu.

7 Méthode pour la linéarisation du système d'équations différentielles

7.1 L'introduction d'une dispersion de productivités dans le secteur de la recherche

Jusqu'ici,le système d'équations différentielles (29),(30) et (31) n'a pas été linéarisé autour des valeurs d'équilibre des trois variables $k, c \text{ et } M$.
Pour arriver aux résultats précédents,nous avons procédé tout le temps en considérant les variables deux à deux,ce qui au passage peut également se faire sous la forme de diagramme de phase par exemple entre $M \text{ et } k$,entre $S_{htick} \text{ et } k$ etc..
Mais dès lors que l'on envisage des systèmes tridimensionnels,l'étude graphique devient lourde et requiert un arsenal géométrique,dont à notre connaissance,il n'existe pas fréquemment pour une très grande part parceque leur étude analytique donne des résultats géométriquement cohérents.
La linéarisation est l'outil de résolution analytique qui sera utilisé dans cette section,mais seulement après avoir résolu la question de la discontinuité de la répartition des chercheurs entre les deux secteurs tel qu'elle apparaît au niveau de l'équation (31).
Une fois linéarisé,il sera possible de se prononcer sur la stabilité du système.
Toutefois,comme l'analyse de la section précédente a pu le montrer,on s'attend à ce que la linéarisation autour de l'état stationnaire conclut à une stabilité au sens du point-selle,par définition locale et entendue comme dépendant aussi de la nature complémentaire (convergence) ou substituable (divergence) des biens finals.
Quitte à se répéter,l'idée ici est d'envisager une réallocation intersectorielle des chercheurs moins brutale que ne le montre l'équation (31) et le raisonnement de la section précédente.C'est donc sur cette équation que s'opérera la modification.
Cette modification s'appuyant sur la relation trouvée précédemment entre $S_{htick} \text{ et } k$ c'est par conséquent la discontinuité de cette dernière qu'il faut se concentrer dans un premier temps.

Soit Ω ,une variable aléatoire indépendante représentant la rémunération de chaque chercheur selon sa productivité dans l'invention de nouveaux biens du secteur tic et du secteur hors tic.
Soit $\Gamma(\Omega)$,la fonction de répartition de Ω .
Supposons qu'un chercheur donné,rémunéré Ω ,avec Ω pouvant prendre n'importe quelle valeur dans la fonction de répartition $\Gamma(\Omega)$,soit en mesure de contribuer pour $b_{ticl}n$ à l'accroissement d'une unité de produit tic mais pour $(1+\Omega)b_{htick}m$ à l'accroissement d'une unité de produit hors tic.
La condition de non-arbitrage rencontrée précédemment, s'écrit désormais:

$$b_{ticl}nV_{ticl} = (1+\Omega)b_{htick}mV_{htick}$$

Lorsque les contributions marginales du chercheur sont identiques entre les deux secteurs de recherche,celui-ci est indifférent quant à aller dans l'un ou l'autre des deux secteurs.

En revanche,lorsque par exemple $b_{ticl} n V_{ticl} < (1+\Omega) b_{htick} m V_{htick}$ ou ce qui revient au même $\sigma_k > (1+\Omega) b$,ou encore $k < k^*(1+\Omega)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$,il ira vers le secteur de la recherche intensive en capital ou secteur hors-tic.

L'idée introduite est qu'en observant $k < k^*(1+\Omega)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$,on peut voir que le déséquilibre est bien influencé selon la valeur prise par la variable aléatoire.

On peut dire qu'en régime de transition,il existera une valeur critique de la rémunération Ω^C qui associe à chaque niveau de $k \neq k^*$,un nombre non nul de chercheurs dont la contribution marginale sera supérieure ou inférieure à cette valeur critique.

Dans l'exemple théorique du déséquilibre considéré ci-dessus,ceux parmi les chercheurs qui auraient une contribution marginale supérieure à la valeur critique iraient dans le secteur de la recherche en produits hors tic et ceux qui auraient une contribution inférieure à la valeur critique iraient dans le secteur tic.

En effet en réécrivant le déséquilibre comme: $\frac{k}{(1+\Omega)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}} < k^*$,on voit mieux que les chercheurs qui ont le plus grand Ω ,tendront à augmenter le ratio $\frac{k}{(1+\Omega)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}}$ lorsque l'élasticité de substitution est inférieure à l'unité.

Ainsi,lorsque k devient de plus en plus proche de son niveau d'équilibre,le nombre S_{htick} de chercheurs destinés au secteur hors-tic requis devient de moins en moins élevé.

De cette façon,il n'y a plus cessation complète de l'activité de recherche dans le secteur intensif en travail mais simplement réallocation des chercheurs favorable au secteur tic ou au secteur hors tic.

Le nombre de chercheurs S_{htick} qui se destinent au secteur hors tic est ainsi relié négativement à l'intensité capitalistique de l'économie k .

Il est alors possible de traduire cette relation par :

$$S_{htick} = \overset{-}{f}\left(\Delta(k)\right)$$

Le signe négatif de la relation provient de la relation inverse qui existe entre la part relative du capital (ou le poids du secteur hors-tic) et l'intensité capitalistique lorsque l'élasticité de substitution est inférieure à l'unité.

Sinon,la relation serait évidemment de signe positif si l'élasticité de substitution était supérieure à un.

Lorsque k est égal à son niveau d'équilibre k^*,le nombre de chercheurs se trouvant dans le secteur intensif en capital se maintient au niveau S^*_{htick} .

En effet,dans ce cas,$\Delta(k)$ ne varie pas et S_{htick} qui en dépend,ne varie pas non plus.

Tenant compte de cette relation,il devient alors possible de transformer légèrement l'équation (31) à l'origine de la discontinuité préjudiciable à une linéarisation:

(32) $$\frac{\dot{M}}{M} = \frac{1-\beta}{\beta}\left(b_k \Delta(k) - \delta\right)$$

Etant donné que l'équation (31) influait sur l'équation (29), la modification intervenue dans la première modifie la seconde qui se réécrit désormais:

(33) $$\frac{\dot{k}}{k} = M\left[\gamma\, k^{-\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}} + (1-\gamma)\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}} - c - \left[\frac{1-\beta}{\beta}\left(b_{ticl}S - \left(b_{ticl} + b_{htick}\right)\Delta(k)\right)\right]$$

Si nous ajoutons à ces deux équations,l'équation (30) qui elle n'est pas concernée par le changement opéré,nous obtenons le système (30),(32) et (33).
Ce système est linéarisable car parfaitement déterminé (3 variables,3 inconnues) mais surtout toutes ses variables sont continues.
Sa vraisemblance dépend de la densité de $\Gamma(\Omega)$.Il est différent du système (29),(30),(31) dès l'instant que la densité de $\Gamma(\Omega)$ est différente de 0.
Si le choix de la fonction de répartition est fondé,il n'y a pas de raisons de se retrouver avec une densité nulle.
Schématiquement,cela signifie que si le choix d'une fonction de répartition comptant par exemple une dizaine de valeurs pour la variable aléatoire Ω ,est tel que les 9 ont une densité $\Omega_1, \Omega_2 ... \Omega_9 \neq 0$,on s'éloigne davantage du système de (29),(30) et (31) en réduisant la discontinuité que dans le cas du choix d'une fonction de répartition telle que 9 des valeurs de la variable aléatoire Ω possèdent une densité nulle (même si l'on réduit la discontinuité par rapport au système (29),(30) et (31).
La preuve de la plus grande vraisemblance du système (30),(32) et (33) est ainsi ébauchée,puisqu'il suffit que le choix d'une fonction de répartition des rémunérations aléatoire présente au moins un point de densité non nulle.
En effet un tel point divisera la population des chercheurs en deux groupes à productivités différentes permettant ainsi au mouvement des chercheurs de se faire continûment selon le rendement requis par l'invention.
Notons au passage à titre de rappel que tous les chercheurs avait été supposés avoir une même productivité,certes différente mais seulement selon le secteur considéré.
Cependant, plus la variabilité des rendements requis par l'innovation est importante et plus les densités de la fonction de répartition des rémunérations aléatoires doivent être hétérogènes si l'on veut garantir une réelle continuité dans l'allocation des chercheurs.

7.2 Linéarisation du nouveau système d'équations différentielles

Ecriture matricielle du système

Présenté à l'ordre n,le développement limité de Taylor qui permet d'approximer une fonction $f(x)$ autour d'un point x^* s'écrit,pour rappel,de la manière suivante:

$$f(x) = f(x^*) + (df/dx)\big|_{x^*}(x - x^*) + (d^2 f/dx^2)\big|_{x^*}(x - x^*)^2\left(\frac{1}{2!}\right) + \ldots + (d^n f/dx^n)\big|_{x^*}(x - x^*)^n\left(\frac{1}{n}\right) + R_n$$

avec $R_n = (x - x^*)^n R(x - x^*)$,le résidu de Taylor-Young qui comme usuellement est d'autant plus faible que l'ordre n de l'approximation est élevé et que le système est proche de l'état stationnaire (x proche de x^*)[39].
Nous considérons le système représenté par les équations différentielles (30), (32) et (33) dont nous cherchons un développement limité d'ordre 1:

$$\begin{cases} \dot{c}_t = c^1[c_t, k_t, M_t] \\ \dot{k}_t = k^1[c_t, k_t, M_t] \\ \dot{M}_t = M^1[c_t, k_t, M_t] \end{cases}$$

La linéarisation de ce système autour des points d'équilibre (c^*, k^*, M^*) et à l'ordre 1 et en négligeant le reste de Taylor-Young, donne:

$$\begin{aligned}
\dot{c}_t &= c^1(c^*, k^*, M^*) + (dc^1/dc)\big|_{c^*}(c - c^*) + (dc^1/dk)\big|_{k^*}(k - k^*) + (dc^1/dM)\big|_{M^\mu}(M - M^*) \\
\dot{k}_t &= k^1(c^*, k^*, M^*) + (dk^1/dc)\big|_{c^*}(c - c^*) + (dk^1/dk)\big|_{k^*}(k - k^*) + (dk^1/dM)\big|_{M^*}(M - M^*) \\
\dot{M}_t &= M^1(c^*, k^*, M^*) + (dM^1/dc)\big|_{c^*}(c - c^*) + (dM^1/dk)\big|_{k^*}(k - k^*) + (dM^1/dM)\big|_{M^*}(M - M^*)
\end{aligned}$$

Ce qui s'écrit de façon équivalente en prenant le logarithme et passant sous notation matricielle (sans tenir compte de l'indice temporel ni de l'exposant d'ordre 1 pour alléger l'écriture):

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\dot{c}}{c} \\ \dfrac{\dot{k}}{k} \\ \dfrac{\dot{M}}{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{cc} & a_{ck} & a_{cM} \\ a_{kc} & a_{kk} & a_{kM} \\ 0 & a_{Mk} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ k \\ M \end{pmatrix}$$

où les constantes $a_{..}$ correspondent aux dérivées partielles des équations du système (30), (32) et (33) calculées à l'état régulier.

[39] Pour un exemple où l'augmentation de l'ordre améliore l'approximation jusqu'à la rendre identique à la fonction approchée,prenons l'approximation de x^3 autour de 1 et à l'ordre 2.En passant à l'ordre 3,le reste de Taylor-Young s'annule.Passer d'un ordre 2 à 3 a donc rendu parfaite l'approximation.

Etude des signes des dérivées partielles et calcul du déterminant de la matrice gradient

Les propriétés de stabilité de ce système matriciel vont dépendre du signe de ses valeurs propres η .Mais le signe de ces valeurs propres dépendra naturellement des signes des dérivées partielles qu'il s'agit dans un premier temps de déterminer.

L'observation de chacune des équations permet d'avoir aisément,la plupart du temps du moins,les signes de ces constantes:
(30) montre ainsi que $a_{cc} = 1 > 0$, $a_{ck} < 0$ (nous rappelons que la consommation C ne diminue pas mais la consommation "normalisée" c diminue lorsque l'intensité capitalistique augmente)
Le signe de a_{cM} n'est pas immédiat.

$$a_{cM} = \theta \ \beta \ (1-\lambda)\left[\gamma \left(k^*\right)^{-\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1-\gamma)\right]^{\frac{1}{\varepsilon-1}} - \left[\gamma \left(k^*\right)^{-\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1-\gamma)\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$$

D'une part le premier terme de l'équation (30) montre que la consommation normalisée augmente avec M mais le second terme montre le contraire.
Ce signe semble indéterminé.
Passons à l'équation (32):
$a_{Mk} < 0$ compte tenu du signe de $\Delta(k)$.Lorsque l'élasticité de substitution est inférieure à 1,une plus grande quantité de biens intermédiaires intensifs en capital réduit la part relative du capital,et donc l'incitation à l'invention de nouveau biens intermédiaires intensifs en capital.
$a_{Mc} \ et \ a_{MM} = 0$
Enfin,l'équation (33):

$a_{kc} = -1 < 0$, $a_{kM} = \left[\gamma \left(k^*\right)^{-\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1-\gamma)\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} > 0$ et $a_{kk} < 0$ compte tenu du signe de $\Delta(k)$ et d'une élasticité de substitution inférieure à 1.

En utilisant l'expression de a_{kM} l'indétermination du signe de a_{cM} et en appelant $\overset{+}{a}_{cM}$ le premier terme positif de la dérivée partielle a_{cM} ,on a :

$a_{cM} = \overset{+}{a}_{cM} - a_{kM}$ (l'avantage étant que sans connaître le signe de a_{cM} ,nous en identifions et connaissons néanmoins les signes de ses termes,ce qui peut être utile pour la suite)

A ce stade,on introduit les valeurs propres dont nous cherchons également les signes. Soit I,la matrice identité.
Pour trouver,les trois valeurs propres,il faut résoudre le polynôme caractéristique $P(\eta)$ du gradient $(Grad)$ (matrice des dérivées partielles premières) d'ordre 3 :

$$P(\eta) = \det(Grad - I\eta) = 0 \Leftrightarrow \det\begin{bmatrix} a_{cc}-\eta & a_{ck} & a_{cM} \\ a_{kc} & a_{kk}-\eta & a_{kM} \\ 0 & a_{Mk} & a_{MM} \end{bmatrix} = 0$$

L'application de la règle de Sarrus[40],adaptée aux calculs de déterminants de matrices d'ordre 3 nous permet d'écrire l'équation suivante:

$$-\eta^3 + \eta^2(a_{cc}+a_{kk}) - \eta(a_{cc}a_{kk} + a_{kM}a_{Mk} - a_{ck}a_{kc}) + a_{cM}a_{kc}a_{Mk} = 0$$

En factorisant par -η^3,on a:

$$-\eta^3\left(1-(a_{cc}+a_{kk})\frac{\eta^2}{\eta^3} + (a_{cc}a_{kk} + a_{kM}a_{Mk} - a_{ck}a_{kc})\frac{\eta}{\eta^3}\right) = -a_{cM}a_{kc}a_{Mk}$$

$$\eta^3 = \eta_1\eta_2\eta_3 = a_{cM}a_{kc}a_{Mk}$$

Or $a_{cM} = \overset{+}{a}_{cM} - a_{kM}$,ce qui en remplaçant et en développant dans l'expression ci-dessus donne:

$$\eta_1\eta_2\eta_3 = \overset{+}{a}_{cM}\, a_{kc}a_{Mk} + a_{kM}a_{kc}a_{Mk}$$

Et comme,l'étude précédente l'avait montré ($a_{kc} < 0, a_{Mk} < 0\ et\ a_{kM} > 0$),le produit des trois valeurs propres est positif,ce qui implique que l'on doive avoir:
- soit les trois valeurs propres toutes positives
- soit une valeur propre positive et deux négatives

S'il en est ainsi,le nouveau système est localement stable lorsque l'élasticité de substitution est inférieure à 1.
En reprenant la même démarche et en travaillant avec une élasticité de substitution supérieure à l'unité,on obtient :

$\eta_1\eta_2\eta_3 = \overset{+}{a}_{cM}\, a_{kc}a_{Mk} + a_{kM}a_{kc}a_{Mk} < 0$ ce qui est incompatible avec l'annulation du déterminant. En conséquence,le nouveau système ne serait pas localement stable.

[40] Il suffit d'ajouter de nouveau les deux premières lignes du $Grad$ au bas des trois lignes initiales.
Ensuite on multiplie toutes les diagonales de gauche à droite qu'on additionne et de droite à gauche qu'on additionne aussi.Enfin,on prend la différence entre les deux sommes (droite moins gauche).
Le signe obtenu est celui du déterminant.

Encadré 2.5: *"Capital deepening"* et croissance de la productivité du travail dans la transition

Le phénomène de *"capital deepening"* importe beaucoup dans la compréhension de l'évolution positive des taux de salaires à long terme: Dans ce modèle,la croissance équilibrée de long terme se fait avec un taux d'intérêt donné et un stock de capital croissant au taux g alors que la population active L est considérée constante.
Or on a vu qu'en croissance équilibrée,il devrait se produire uniquement du progrès technique harrodien au taux g.
En conséquence la part relative du capital et le taux d'intérêt restent constants. Comme L est constant,les salaires doivent avoir augmenté comme le stock de capital.
Le phénomène de *"capital deepening"* ne peut avoir un rôle concevable avec une vision statique de l'équilibre: la substitution du capital (augmentant le numérateur de la condition de non-arbitrage) au travail (réduisant le dénominateur) modifierait la condition de non-arbitrage ou de façon équivalente la part relative du capital qui est requise à l'équilibre.
Pourtant ce phénomène a historiquement eu un rôle admis et vérifié statistiquement.Sur le long terme le coût du travail dans le produit global pèserait plus de 2/3.C'est donc que sur plusieurs phases de court terme,la nature du progrès technique ne fut pas d'exclusivité harrodienne.
Plus justement,le progrès technique n'a pas toujours été harrodien et à un rythme égal à l'accumulation du capital.Nous l'avons déjà mentionné sur courtes périodes au niveau des figures a et b.

A partir de ce résultat sur les parts factorielles du travail et du capital vérifié à long terme,on ne voit pas du tout comment le *"capital deepening"* a pu contribuer lorsque l'on observe la croissance d'équilibre de long terme.
Le présent raisonnement peut y contribuer:
Il faut concevoir la croissance équilibrée comme phénomène de long terme,une résultante de plusieurs courtes périodes.
On passe donc par plusieurs séquences de déséquilibres.
Dit autrement la part factorielle du capital n'est pas toujours constante.
Or en dehors de l'équilibre,on a montré que le moteur de l'invention de nouveaux biens intermédiaires était le profit associé à cette invention.
Rien-et c'est ce qu'il se passe en transition-n'interdit d'avoir une profitabilité plus grande pour l'un ou l'autre des 2 secteurs.
En l'occurrence,pour les besoins de notre propos,rien n'interdit d'avoir une profitabilité plus grande pour les biens intermédiaires intensifs en capital et donc réaliser du progrès technique en direction de ces biens.
Et c'est à ce stade que peut apparaître la substitution capital-travail ("*capital deepening"*) qui conjuguée en outre au phénomène d'accumulation va augmenter la part du capital dans le produit élevant ainsi la productivité du travail et donc les taux de salaires davantage que ne le laisserait se faire ce modèle en raison bien entendu de la contrainte de croissance équilibrée.
Ce mouvement est d'autant plus ample que l'élasticité de substitution est grande.
Remarquons,pour terminer que la modélisation adoptée dans ce travail,met faiblement en perspective ce phénomène.

En effet,les produits tic sont supposés d'emblée avoir un impact positif sur la productivité du travail,ce qui revient à considérer acquise la substituabilité capital/travail évoqué dans les formalisations habituelles du progrès technique.
Le *"capital deepening"* entendu au sens habituel de substitution capital/travail n'apparaît donc pas à ce titre mais n'est pas pour autant sous-estimé dès lors qu'est bien compris le sens de la modélisation adpotée.
L'introduction d'un équipement tic a pour effet d'augmenter la productivité du travail.
Du *"capital deepening"* est à l'œuvre en régime de croissance équilibrée sans cependant que ne soit mis en relief un quelconque effet de substitution entre cet équipement et le facteur travail (bien qu'il existe évidemment).

8 Révision de l'hypothèse relative à la frontière des possibilités d'innovation

Dans ce modèle la croissance équilibrée n'est plus possible si l'on prenait en compte l'hypothèse de *spillovers* intersectoriels que renferment les équations (8) à savoir les frontières de possibilités d'innovations.
Comme il a déjà été souligné,ces équations contiennent trois informations:
D'abord,l'invention de biens dans le secteur tic ou dans le secteur hors tic nécessite l'utilisation d'un facteur rare : le "scientifique".
Ensuite,et en lien avec la première information,des *"spillovers"* de la recherche passé vers le présent permettent,comme dans toutes les formulations utilisant du facteur rare,de soutenir la croissance à long terme.
Enfin,ces *"spillovers*" de la recherche passée se produisent sous une forme particulière: Une invention dans un secteur donné,par exemple le secteur des biens intermédiaires intensifs en capital,impactait sur la productivité des chercheurs dans ce secteur,eu égard à la deuxième information ci-dessus,mais n'avait aucun impact sur celle des chercheurs de l'autre secteur.
On reconnaît là,la notion de *"state dependance"* lorsque la productivité relative d'un secteur par rapport à un autre dépend uniquement de l'état des productivités.
Pour détailler davantage,nous précisons qu'elle dépendent de l'état final du système.
Ainsi,lorsque le système étudié comporte m produits du secteur hors tic et n produits du secteur tic,la productivité relative dans chaque secteur dépend de l'état $\{m,n\}$.
Supposons l'invention d'une unité du produit du secteur hors tic:
le système passe à $\{m+1,n\}$ et la productivité relative dans chaque secteur dépend de l'état $\{m+1,n\}$.On perçoit bien l'idée de la *"state dependance"*:
Le nombre de produits n,n'a pas évolué en présence d'une augmentation de productivité dans le secteur hors tic.
La productivité relative des chercheurs dans le secteur hors tic a augmenté proportionnellement à l'invention.
Elle aurait augmenté moins que proportionnellement si un quelconque effet intersectoriel était apparu ou était pris en compte.

8.1 Relâchement de l'hypothèse de *"state dependance"* et l'impossibilité de croissance équilibrée

Lorsqu'il n'y a plus de *"state dependance"* entre les deux secteurs de la recherche,on ne peut plus retrouver le régime de croissance équilibrée.
Nous montrons dans un premier temps comment un tel résultat peut se démontrer et se comprendre.

Pour cela,il est nécessaire d'introduire la modification de l'hypothèse de *"state dependance"* au niveau des équations (8),ce qui amène aux formulations suivantes:

(8)' $$\dot{n} = b_{ticl} n^{\nu} m^{1-\nu} S_{ticl} - \delta n \quad et \quad \dot{m} = b_{htick} n^{\nu} m^{1-\nu} S_{htick} - \delta m$$

Dans les équations (8)',on s'aperçoit que les deux premières informations évoquées plus haut demeurent mais que celle relative à l'existence d'une *"state dependance"* est occultée.
Ainsi on peut affirmer que désormais,l'invention dans un des deux secteurs qui consiste pour rappel à augmenter n ou m,génère des effets sur la productivité absolue de l'autre secteur.
Les productivités relatives dans chaque secteur sont certes toujours déterminées par l'état final du système mais pas seulement dès lors que l'obtention de l'état final du système envisage des *spillovers* intersectoriels.

Se pose à ce stade la question suivante: Une telle formalisation de la recherche autorise-t-elle la croissance équilibrée ?
Il fallait démontrer que le régime ne peut plus se retrouver équilibré.
En voici la démonstration et l'intuition:
Comme pour le modèle de base,le régime de croissance équilibrée implique que la contribution marginale maximale des"scientifiques" à la valeur de l'invention d'un nouveau bien intermédiaire intensif en travail devienne égale à cette valeur dans le secteur intensif en capital ce qui tenant compte de (8)' se matérialise par :

$$w_S = \max\left\{b_{ticl} n^{\nu} m^{1-\nu} V_{ticl}, b_{htick} n^{\nu} m^{1-\nu} V_{htick}\right\}$$ par analogie avec l'équation (21)

Ce qui équivaut à l'équilibre de long terme à ce que:

(21)' $$b_l V_{ticl} = b_{htick} V_{htick}$$

Cette condition ressemble à celle qui avait permis de trouver la condition de non-arbitrage dans le modèle de base.Mais elle n'est pas exactement la même.
Cette dernière avait permis d'écrire à partir de la part relative d'équilibre du capital elle-même réécrite comme (26) et de (22) d'exprimer cette part relative d'équilibre du capital en fonction des paramètres du modèle (équation (27)).

Rappelons les différentes expressions qui permettront d'expliciter l'équation (21)':

La part relative du capital était: $\sigma_K = \dfrac{rK}{wL}$

L'équation (27) était: $\sigma_k = \dfrac{b_{ticl}(1-\beta)(\rho+\delta+(\theta-1)g)}{b_{htick}((1-\beta)(\rho+\delta)+((1-\beta)(\theta-1)+\beta)g)} = b$

En remplaçant la part relative du capital par sa valeur,l'équation (27) s'avère renfermer l'écriture suivante:

$$b_{htick} rK = b_{ticl} wL = \frac{(1-\beta)(\rho+\delta+(\theta-1)g)}{((1-\beta)(\rho+\delta)+((1-\beta)(\theta-1)+\beta)g)}$$

L'équation (27) avait été obtenue grâce à la combinaison de l'hypothèse de libre entrée dans la recherche et des équations (22).
L'hypothèse de libre entrée se traduisait pour rappel par:

$$b_{ticl} nV_{ticl} = b_{htick} mV_{htick}$$

On peut s'intéresser uniquement aux deux termes de la double égalité ci-dessus et en comparant l'hypothèse de libre entrée $b_{ticl} nV_{ticl} = b_{htick} mV_{htick}$ avec la nouvelle soit l'équation (21)',on peut écrire comme suit la nouvelle condition de non-arbitrage:

(27)' $$b_{htick} \frac{rK}{m} = b_{ticl} \frac{wL}{n}$$

En croissance équilibrée,nous savions qu'il était requis que le taux de l'intérêt demeurât constant,ce qui *in fine* imposait de ne pas avoir de progrès technique net dans le secteur des biens intermédiaires intensifs en capital soit donc $\dot{m} = 0$.
Par ailleurs $w, n \ et \ K$ devaient croître au taux identique g.
Ces observations appliquées à l'équation (27)' montrent bien l'impossibilité d'obtenir une croissance équilibre dans un système occultant la question de la *"state dependance"*.
En effet pour que l'équation (27)' - qui correspond à ce qu'il doit en être lorsque l'on se trouve en régime de croissance équilibrée- tienne, et compte tenu de ce que $w, n \ et \ K$ croissent toutes au taux identique g,il est indispensable que m fasse autant.
Par conséquent la croissance ne peut être équilibrée,puisque $\dot{m} \neq 0$ mais seulement régulière car dès que l'on admet une croissance de m,le taux d'intérêt cesse d'être constant,ce qui compte tenu de l'équation (9) rendrait erratique la croissance de la consommation.
Si nous supposons en revanche un taux de croissance constant de m,on peut avoir un taux d'intérêt évoluant constamment et un régime de croissance mais seulement régulière puisque toutes les variables n'évolueraient pas à un taux identique.

En résumé,un régime de croissance équilibrée ne peut exister qu'avec du progrès technique neutre au sens de Harrod.
L'intuition d'un tel résultat n'est pas nouvelle sauf en ce qu'elle met en exergue le rôle de la notion de *"state-dependance"* :
Lorsque que l'on admet que le progrès technique puisse laisser m évoluer,il faudrait toujours que la profitabilité liée au secteur intensif en capital soit égale à celle de l'autre secteur (condition de non-arbitrage).
Ce faisant la recherche pourra se faire uniquement dans le secteur intensif en travail.
Mais et ce n'est pas une nouveauté,l'accumulation du capital (et l'impossibilité d'accumulation du travail) favorise relativement plus le secteur intensif en capital et transite *via* les *spillovers,*créant ainsi un différentiel de productivité en faveur du secteur intensif en capital (puisque m augmente aussi).

Dès lors,tant que ce différentiel de productivité n'est pas compensé par du progrès technique en direction du secteur intensif en travail,la profitabilité ne saurait être la même dans les deux secteurs.
Les *spillovers* intersectoriels ne doivent donc pas avoir lieu,ce qui s'obtient par l'implémentation d'une *"state dependance"*

8.2 Prise en considération d'une nouvelle forme de *"state dependance"*: la dépendance statique asymétrique

On cherche maintenant à montrer que la conclusion du modèle vaut également aussi bien dans l'hypothèse d'une *"state dependance"* symétrique que dans l'hypothèse d'une *"state dependance"* asymétrique du secteur intensif en travail vers le secteur intensif en capital ou l'inverse.
Dit autrement,il n'y aura pas de régime de croissance équilibrée lorsque l'on considère l'existence de *spillovers* nets bénéficiant au secteur intensif en capital ou de spillovers nets bénéficiant au secteur intensif en travail.
Nous montrons l'impossibilité lorsqu'on se trouve dans le premier cas.
Quant au second,étant donné que le régime de croissance équilibrée exclut que m puisse augmenter,il n'est pas plausible de considérer l'existence de quelconque effets en provenance du secteur intensif en capital.
Le régime équilibré dans ce modèle est contraignant.

Si les *spillovers* pouvaient être différenciés,on pourrait modifier l'équation (8)' de telle sorte que l'on fasse apparaître uniquement les *spillovers* nets.
Le flou qui entoure la définition très précise de ce que sont exactement n et m nous a incliné à considérer que n est plus proche des biens et services de type TIC au sens où:l'utilisation de tels biens et services améliore la productivité du travail.
Les *spillovers* en provenance des produits TIC sont un exemple de *spillovers* nets c'est-à-dire que l'on a des effets positifs nets en termes d'externalités en provenance de ce secteur.
Cela permettrait donc de ne modifier que l'une des équations (8)' à savoir celle du secteur des biens intermédiaires intensifs en travail comme suit:

(8)'' $\dot{n} = b_{ticl} n S_{ticl} - \delta\, n$ et $\dot{m} = b_{htick} n^{v}\, m S_{htick} - \delta\, m$

Les formulation (8)'' gardent comme dans le modèle initial l'existence de *spillovers* de la recherche passée mais introduisent un changement par rapport aux externalités intersectorielles.Celles-ci sont en effet des externalités intersectorielles nettes qui jouent en faveur d'une augmentation du nombre de biens intermédiaires horsTIC (HTIC) mais dont la source provient du rythme plus élevé de progrès technique du secteur TIC.
La source d'amélioration des performances des produits tic génère un effet positif bien entendu dans le secteur tic mais son importance est telle qu'elle compense les externalités en provenance du secteur hors tic,ce qui explique que nous retrouvons le terme n^{v} dans l'équation de la frontière d'innovation du secteur hors tic.
Une des importantes limites des modèles de croissance néoclassique dans la lignée du modèle de Solow,réside non seulement dans le fait que les gains de performance intra sectoriels apparaissent sans coûts,mais également que ces gains sont gratuits lorsqu'elles ont une source extra sectorielle donc les externalités.

La première limite est levée dans le cadre de ce modèle, puisque l'activité de recherche est coûteuse et est rémunérée par des brevets achetés par le secteur des biens intermédiaires.
La deuxième limite souligne que les externalités difficiles à mesurer doivent cependant rémunérer le secteur qui en est à l'origine.
Le salaire des chercheurs de ce secteur augmenterait donc de ce fait.

(21)" $$w_S = \max\left\{b_{ticl}\, n V_{ticl}, b_{htick}\, n^{v}\, m V_{htick}\right\}$$ par analogie avec (21)

En comparant (21)" à (21),on peut remarquer que la nouveauté concerne la présence du terme n^{v} qui représente l'effet net positif du secteur tic vers les autres secteurs.
La nouvelle condition de non-arbitrage devient:

(27)" $$b_{ticl}\frac{wL}{n} = b_{htick}\frac{n^{v}\, rK}{m}$$

L'équation (27)" est incompatible avec l'existence d'un régime de croissance équilibrée.
En effet,en croissance équilibrée,il est requis que m reste constant et que $w, n\, et\, K$ croissent au même taux.
Pour qu'elle soit vérifiée,l'équation (27)'implique qu'alors m doive non seulement augmenter mais le faire d'autant plus que les *spillovers* nets en provenance du secteur tic se font à un rythme important.

Conclusion

Comment répondre à l'incertitude relative au futur de la diffusion des produits tic dans une économie ?
Quelles sont les conditions endogènes qui rendraient l'apport contributif de ces produits constant, croissant ou décroissant ?
Durant la période de diffusion de ces produits,la baisse de leurs prix à gains de performances identiques,engendre une forte croissance de leur demande qui rend croissante leur part contributive à la croissance.
Mais pour que cette tendance se poursuive,il est nécessaire que l'élasticité de substitution de ces produits par rapport aux autres reste supérieure à 1.
Comment approcher l'évolution de la part du secteur TIC dans la croissance dans un cadre théorique endogène alors que l'essentiel des modèles de croissance adoptent une fonction de production Cobb-Douglas ou partent de l'hypothèse d'un progrès technique neutre au sens de Harrod pour étudier les parts factorielles à long terme ?
Oulton [2002] suggère de trouver une fonction de demande de produits tic qui aurait la particularité de présenter une élasticité-prix de la demande élevée lorsque les prix sont élevés et une élasticité-prix de la demande faible lorsque les prix deviennent faibles.
Une telle analyse préfigure une part continûment décroissante des produits tic dans la croissance au fur et à mesure de leur diffusion.
A défaut de trouver une telle fonction (en même temps à supposer qu'on puisse la trouver,il fallait en outre expliquer en quoi elle serait plus pertinente s'agissant des TIC),on a cherché d'abord à considérer comme établie la relation croissante entre l'abondance de ces produits et la productivité du travail.
L'élasticité de substitution dont le rôle est souligné interviendra dans le choix d'orientation qui sera donné au progrès technique par les entreprises maximisatrices de profits et cela selon une logique de progrès technique induit par le prix relatif des facteurs de production.
De ce fait le progrès technique consistait,suivant une logique de maximisation des profits dans le secteur de la recherche,à augmenter le nombre de ces produits dans l'économie.
Une fois introduits dans l'économie,leur nombre relativement plus ou moins important que celui des autres produits (hors-tic),déterminait non seulement l'ampleur de leur effet sur la productivité du travail mais également par conséquent la part relative des revenus du travail par rapport aux revenus du capital.
Une large discussion a porté sur les conditions de croissance équilibrée.
Il est apparu conformément aux formalisations que nous avions qualifiées d'*"a prioristes"* que le progrès technique de longue période ne pouvait qu'être harrodien en régime de croissance équilibrée.
Cela correspondrait pour notre propos à une part donnée des revenus du travail par rapport aux revenus du capital,part qui est compatible avec une croissance équilibrée. Mais cela n'est vrai que lorsque l'élasticité de substitution entre produits tic et hors tic est rigide,ce qui ramène dans la discussion le rôle crucial de ce paramètre.
Il est ensuite apparu utile d'étudier ce qu'il se passe dans le régime de transition car un régime équilibré n'a réellement de sens que si partant d'une situation de déséquilibre (part relative du travail ou du capital différente de celle du régime de croissance équilibrée),on y revient.

Il en ressort que le système est stable au sens du point-selle et dépend bien entendu encore de l'importance de l'élasticité de substitution entre les produits des deux secteurs considérés.
Il y est possible d'avoir du progrès technique harrodien mais également solowien,en fonction comme nous venons de le rappeler de l'élasticité de substitution,de la part relative des revenus du capital ce qui signifie également du nombre relatif de biens tic dans l'économie.
Mais la stabilité du système n'est vérifiée qu'en cas d'élasticité de substitution rigide entre les deux secteurs.
Cela tend à montrer que contrairement à l'intuition qui voudrait que lorsque l'élasticité de substitution est inférieure à un la part des produits TIC dans la valeur ajoutée décroisse,il peut y avoir maintien de cette part en régime de croissance équilibrée.
Ce maintien est d'autant plus intéressant que le régime est stable.
Il demeure cependant conforme à l'intuition que lorsque l'élasticité de substitution est supérieure à l'unité,la contribution des TIC à la croissance s'améliore.
Ces résultats ne peuvent s'obtenir,ni s'appréhender en dehors d'un fonctionnement endogène conçu dans la droite ligne des articles de Romer [1986 et 1980] où l'induction par les prix du progrès technique suit un objectif de maximisation financière.
Ils doivent également se lire au travers du prisme des parts factorielles dont la stabilité et les mouvements sont le miroir régulier d'une plus ou moins grande présence de ces produits dans une économie.
Enfin,la représentation de l'économie qui a été adoptée,laisse vraie toute invention qui viendrait améliorer la productivité du travail à l'instar des produits TIC.
Il est évident que si parmi les n produits qui ont un effet bénéfique sur cette productivité,la proportion de ceux appartenant à la famille des TIC se réduisait,le poids des TIC iraient en déclinant toutes choses restant égales par ailleurs (élasticités de substitution,nombre des biens des secteurs améliorant la productivité du capital).
Le dynamisme de l'industrie TIC peut rester récompensé par des apports croissants dans la croissance économique ce qui l'entretient en retour.